APUNTES DE SISTEMAS

AXONOMÉTRICOS

JORGE LUIS CALDERÓN SALCEDO

Profesor Asociado de la Universidad de Los Andes

Mérida—Venezuela

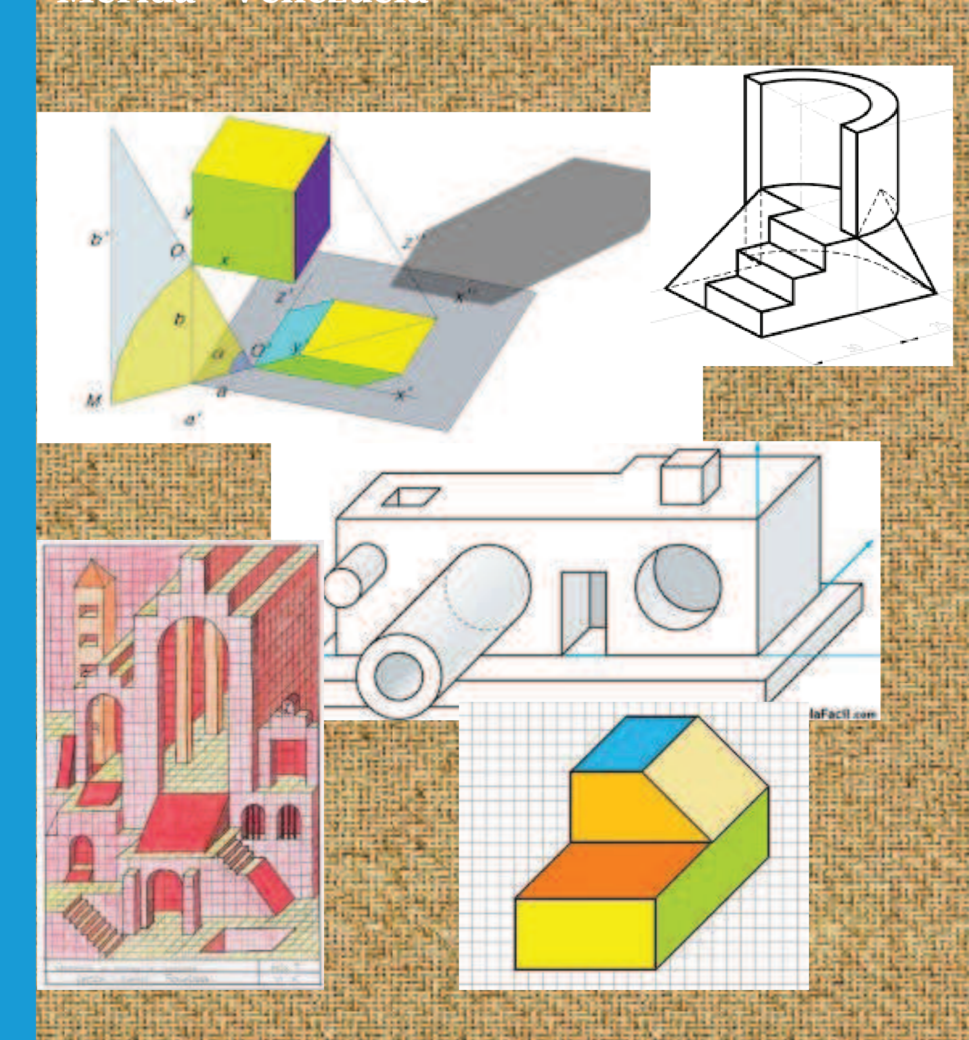




TABLA DE CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Varios sistemas de representación reciben el nombre de "perspectivas". Sin embargo, si se atiende de manera rigurosa al sentido etimológico de esa palabra, el cual no es otro que la percepción visual de los objetos, solamente el Sistema Cónico posee características que lo hacen merecedor de ese término, pues es el que más se acerca a la forma como el ser humano percibe la realidad a través del sentido de la vista, y por consiguiente, el que ofrece la mayor sensación de realismo y los mejores efectos desde el punto de vista plástico. No obstante, su empleo en el mundo de la representación con fines técnicos, plantea un estudio más complejo y una ejecución sustancialmente más laboriosa de las representaciones. Por esta razón, se justifica plenamente el uso de los llamados *Sistemas Axonométricos* en el ejercicio de la Ingeniería, ya que estos son de más sencillo manejo, permiten una graficación fácil y rápida, así como una cómoda lectura de las magnitudes, particularidades especialmente importantes en los dibujos con fines constructivos. Al mismo tiempo, estos sistemas cumplen con una representación volumétrica, es decir, ofrecen imágenes bidimensionales con "ilusión" de tridimensionalidad, lo cual significa un valioso componente expresivo, sin llegar a la altura del Sistema Cónico pero satisfaciendo las necesidades del ámbito técnico.

Por lo antes expuesto, los Sistemas Axonométricos constituyen una interesante forma de expresión gráfica que combina lo mejor de ambos grupos de sistemas: el carácter perspectivo de los sistemas cónicos y la facilidad en la toma de medidas. Por otra parte, los Sistemas Axonométricos se subdividen en dos categorías: sistemas oblicuos y sistemas ortogonales, los cuales, al mismo tiempo, ofrecen diferentes esquemas originados a partir de la manipulación de los parámetros que definen al sistema, enriqueciendo así el conjunto de herramientas a disposición del diseñador. El buen uso de estas diferentes formas de representación va a depender de una cuidadosa y concienzuda selección del esquema, tomando en consideración las características y ventajas de cada uno de ellos, así como las necesidades y requerimientos del diseño, con el objetivo de lograr el mejor resultado posible.

El abordaje de los Sistemas Axonométricos que se hace en el presente trabajo no es – ni pretende ser –tan exhaustivo y profundo como el que caracteriza a un libro de texto. Se trata de unos apuntes expuestos en un lenguaje sencillo, dirigidos a los estudiantes de Sistemas de Representación 20 y pensados para aprovechar los sistemas en su

aplicación directa. Por tanto, cuestiones como las relaciones geométricas y problemas métricos, abatimientos, entre otros, se omiten en la explicación, la cual hace especial énfasis en la representación axonométrica de sólidos complejos a partir de sus vistas ortográficas (Alzado, Planta y Perfil), aplicación principalísima de los sistemas en el campo del diseño en las diferentes ramas de la Ingeniería.

Se ha puesto especial atención en la visualización espacial de volúmenes, suministrando para ello una serie de estrategias dirigidas a facilitar este proceso.

M. Sc. Ing. Jorge Luis Calderón Salcedo

Profesor Asociado

Mérida, Venezuela, noviembre de 2016

SISTEMA AXONONOMÉTRICO OBLICUO

Generalidades

El sistema axonométrico oblicuo, perteneciente a la familia de las proyecciones cilíndricas, se caracteriza por tener sus rayos de proyección paralelos entre sí, siendo su dirección oblicua respecto al plano de proyección, llamado también plano del cuadro o del dibujo. El nombre de axonométrico se debe a la presencia gráficamente diferenciada de los tres ejes coordenados X, Y y Z, dos de los cuales aparecen en verdadera magnitud (aquéllos que conforman el plano del cuadro) y uno se proyecta distorsionado por causa de la oblicuidad de los rayos de proyección (Fig. 1).

El rayo proyectante que pasa por A', al penetrar el plano XY en A, produce la proyección OA que conjuntamente con OA' forma el triángulo rectángulo AOA'. La longitud de la proyección OA respecto al verdadero tamaño OA' depende del ángulo φ. Si éste es igual a 45º, OA = OA'; si es menor de 45º, entonces OA>OA'; y si es mayor de 45º, OA<OA'.

Con el fin de evitar excesivas deformaciones en los objetos representados en relación con sus verdaderas magnitudes, y de acuerdo con la apariencia que presentan ante nuestra vista, el ángulo que los rayos proyectantes forman con el plano del cuadro es generalmente mayor de 45º, con lo cual la proyección del eje Y' será siempre inferior a su verdadero tamaño, relación que por ser menor que la unidad toma el nombre de *coeficiente de reducción* (q_y).

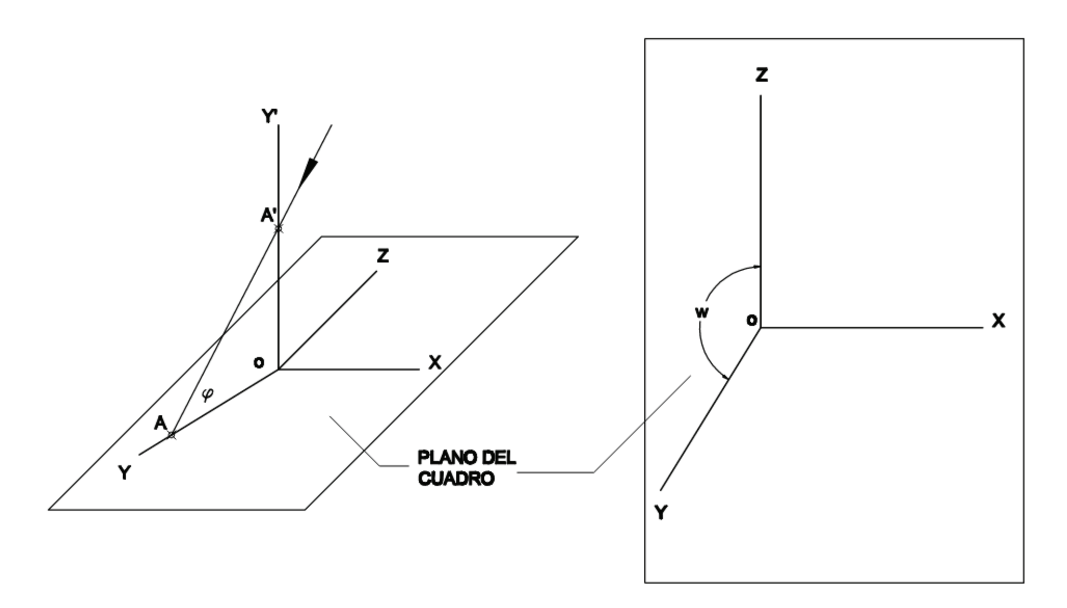


Fig. 1

$$q_y = \frac{OA'}{OA} = \cot\varphi$$

Por otra parte, la posición del eje Y (en la proyección) puede variar según un ángulo ω entre 0 y 360º, permaneciendo constante el ángulo φ que las direcciones de los rayos forman con el plano XY. Por tanto, para un mismo valor de q_y puede darse cualquier valor de ω. En resumen, el sistema quedará gráficamente determinado mediante la disposición en el plano del dibujo de los ejes X y Z formando ángulo recto; el eje Y según el ángulo ω, con respecto al eje X en el sentido contrario al de las agujas del reloj; y el coeficiente de reducción q_y.

Los valores de ω tomados generalmente en este tipo de representación, también denominada *proyección caballera*, están comprendidos entre 180º y 270º. El valor q_y se expresa como un número quebrado (1/2, 2/3, 1/4, etc.,), por el cual se han de multiplicar (método aritmético o directo) las medidas en la dirección del eje Y' a fin de ser consignadas en la proyección Y.

Paso del diédrico al axonométrico oblicuo

Si bien es posible aplicar aritméticamente el coeficiente de reducción q_y a las medidas correspondientes a la dirección Y' en la proyección Y, resulta también práctica la aplicación del método gráfico, sobre todo cuando se parte de la representación diédrica de una determinada figura.

Supóngase que se requiere la proyección axonométrica oblicua - o representación volumétrica caballera - de un punto A, cuyas proyecciones diédricas son conocidas (Fig. 2). El ángulo ω es de 225º y el coeficiente de reducción de Y' es igual a ½.

La primera actividad consiste en construir los ejes axonométricos X, Y y Z, de acuerdo con las especificaciones dadas, poniendo como origen el mismo origen de coordenadas del sistema diédrico y haciendo coincidir a X con la Línea de Tierra de este sistema. Seguidamente, se mide el denominador de q_y sobre el eje Y' del diédrico a partir del origen, y se mide el numerador sobre la proyección Y, usando para ello cualquier escala.

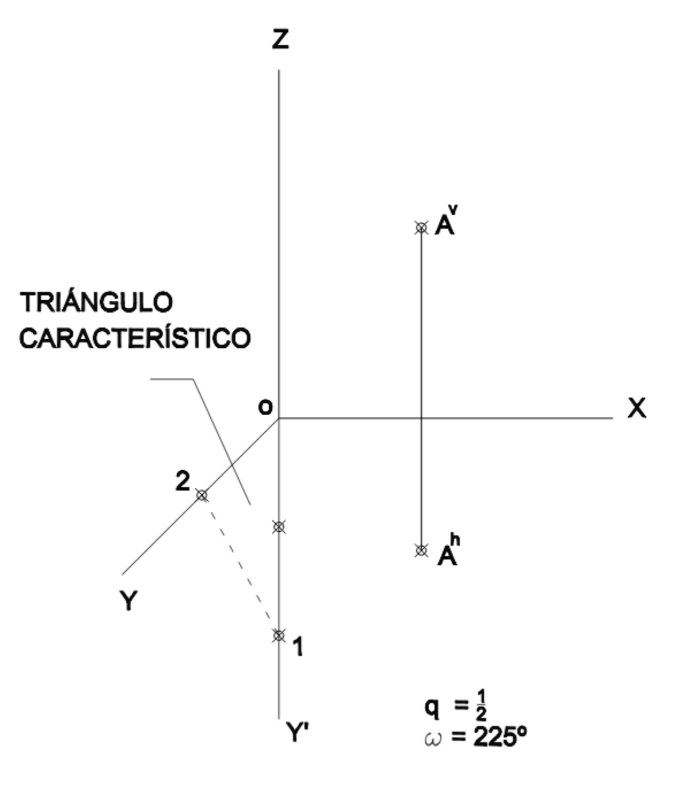


Fig. 2

De esta manera se obtienen, respectivamente, los puntos 1 y 2de la Fig. 2.Al unir los puntos 1 y 2 se define el denominado *triángulo característico*, el cual constituye la referencia fundamental para la implementación del coeficiente de reducción q_y.

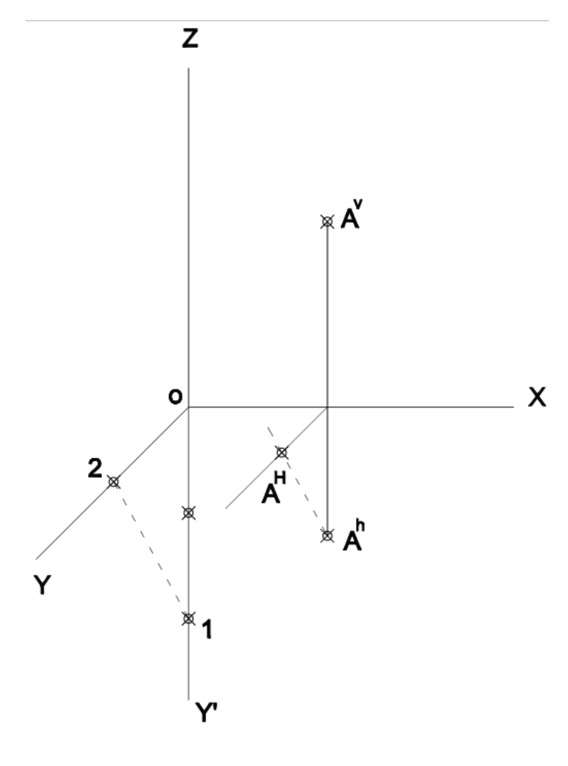


Fig. 3

A continuación, se traza por el punto en el cual el alineamiento correspondiente a las proyecciones diédricas del punto A corta al eje X, una línea paralela a Y. De igual forma, se construye una línea paralela al segmento 12 por la proyección diédrica horizontal de A (A^h). El corte de ambas líneas define la proyección axonométrica del punto A sobre el plano coordenado XY (A^H). Nótese (Fig. 3) cómo se genera un triángulo semejante al triángulo característico, con lo cual queda garantizada la implementación del coeficiente de reducción q_y.

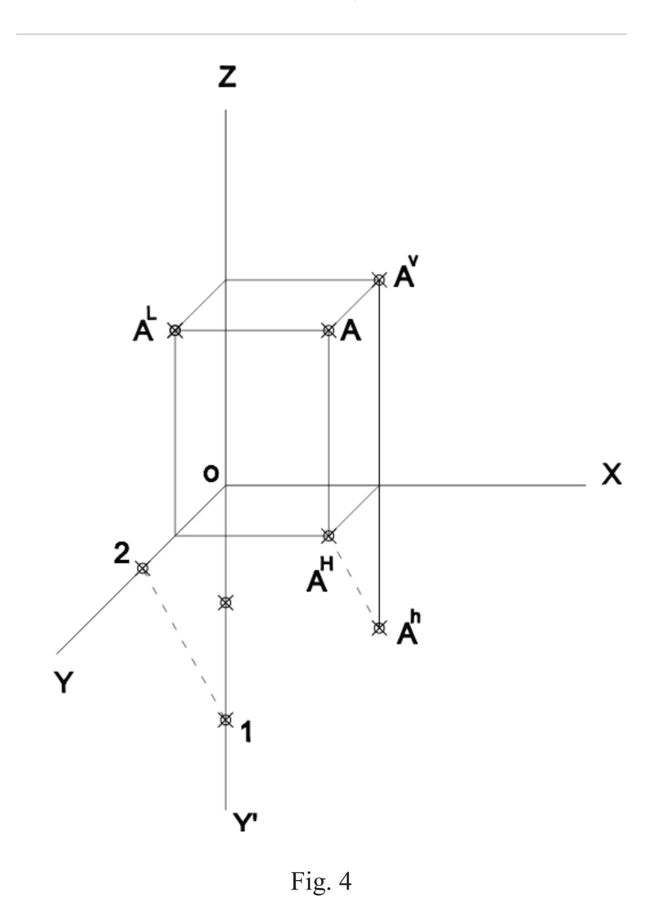


Fig. 4

La proyección axonométrica o representación volumétrica del punto A (Fig. 4) sobre el plano XZ coincide con la proyección diédrica vertical A^v. Para determinar la proyección axonométrica espacial del punto A, basta con trazar una paralela a Y por A^v y una paralela a Z por A^h, siendo A el corte de ambas líneas. La proyección de A sobre el plano YZ (A^L) se obtiene aplicando paralelismo.

Representación de Figuras tridimensionales en sistema axonométrico oblicuo

La Fig. 5 muestra las proyecciones diédricas de una figura tridimensional. Sea $\omega = 225º$ y $q_y = ½$.

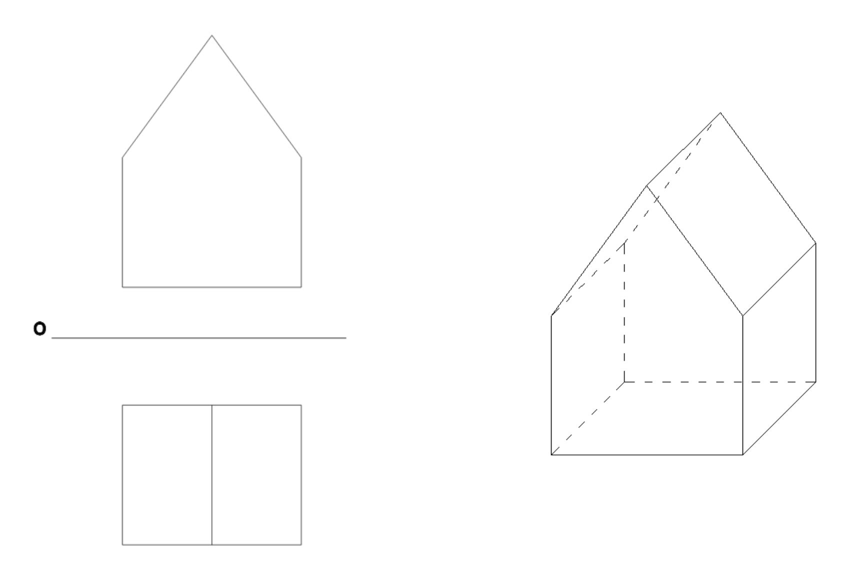


Fig. 5

La obtención de la representación axonométrica oblicua de una figura tridimensional, a partir de sus proyecciones diédricas (planta y alzado), requiere de un procedimiento que inicia con la construcción de la proyección axonométrica de la planta del objeto. Para ello, es preciso aplicar los pasos seguidos en el apartado anterior para obtener A^H, a cada uno de los puntos que conforman dicha planta, tal y como se muestra en la Fig. 6.

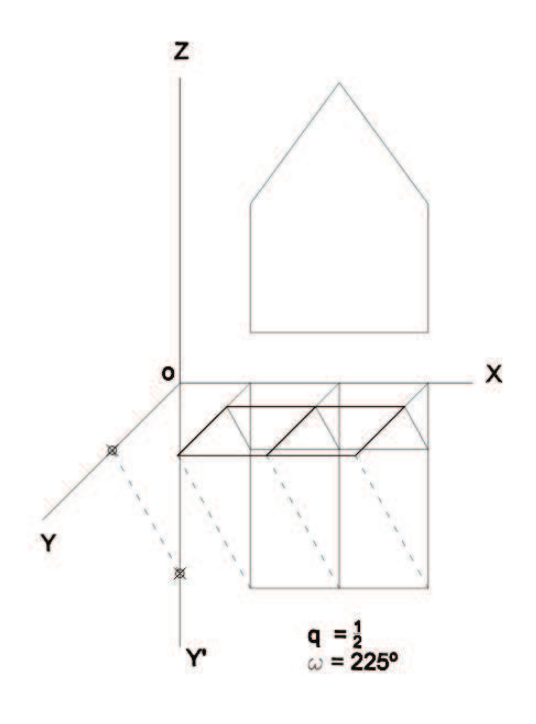


Fig. 6

El siguiente paso es el *levantamiento* de la proyección axonométrica del sólido; para ello, se trazan paralelas a Y por los puntos que conforman el alzado (proyección diédrica vertical) de la figura, y paralelas a Z por los puntos de la proyección axonométrica de la planta. La unión de los cortes entre las parejas de líneas así trazadas, que se corresponden de manera lógica y coherente con los vértices de la figura tridimensional, da como resultado la representación axonométrica buscada. Esta constituye una imagen que comunica una ilusión de volumen al observador, lo que es el objetivo y justificación del uso del sistema (Fig. 7).

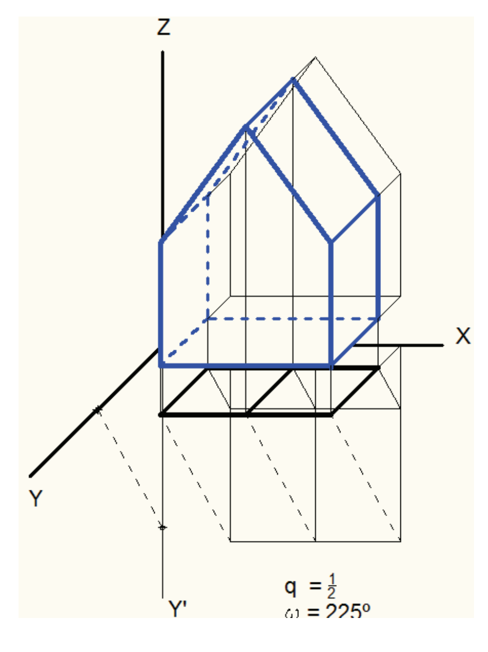


Fig. 7

Como es de esperarse, el alzado en diédrico coincide con la proyección de la figura sobre el plano XZ, ya que este último es el mismo plano del cuadro o plano del dibujo.

Variante del sistema

Como se indicó al inicio, el valor de ω varía entre 180º y 270º, en tanto que q_y debe ser menor que uno (y mayor que cero por supuesto). Queda a criterio del diseñador seleccionar estos parámetros, tomando en cuenta las características del objeto a representar y de la orientación que se le desea dar a la representación.

Por otra parte, es menester mencionar que existe otra variante del sistema axonométrico oblicuo, la cual se origina al cambiar el plano del cuadro. Así, cuando se decide hacer coincidir a este último con el plano coordenado XY, se obtiene una *proyección militar* o aérea, en cuyo caso habrá de considerarse un coeficiente de reducción para la dirección Z' (q_z) y un ángulo ω comprendido entre 90º y 180º (sin incluir los extremos del

intervalo). Para ilustrar este punto, es conveniente estudiar un ejemplo práctico. La Fig. 8 muestra las vistas ortogonales (Alzado, Planta y Perfil o Vista Lateral Derecha) de un sólido compuesto. Se desea determinar la proyección militar del mismo, empleando para ello un $q_z = \frac{3}{4}$ y $\omega = 135º$.

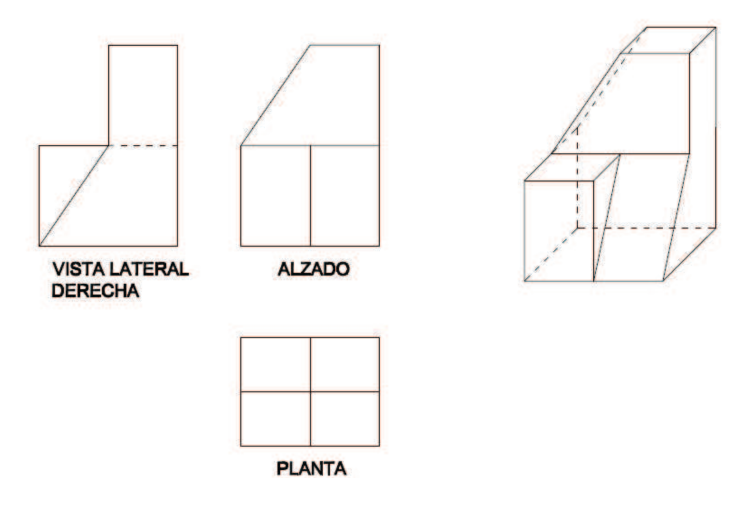


Fig. 8

En este caso, la planta del sólido no presenta deformaciones a la hora de pasar del sistema diédrico al sistema axonométrico. El alzado, en cambio, debe construirse en la nueva proyección (Fig. 9), trazando previamente el correspondiente triángulo característico (recordar medir el denominador del coeficiente q_z en el eje Z' y el numerador en el eje Z, usando cualquier escala).

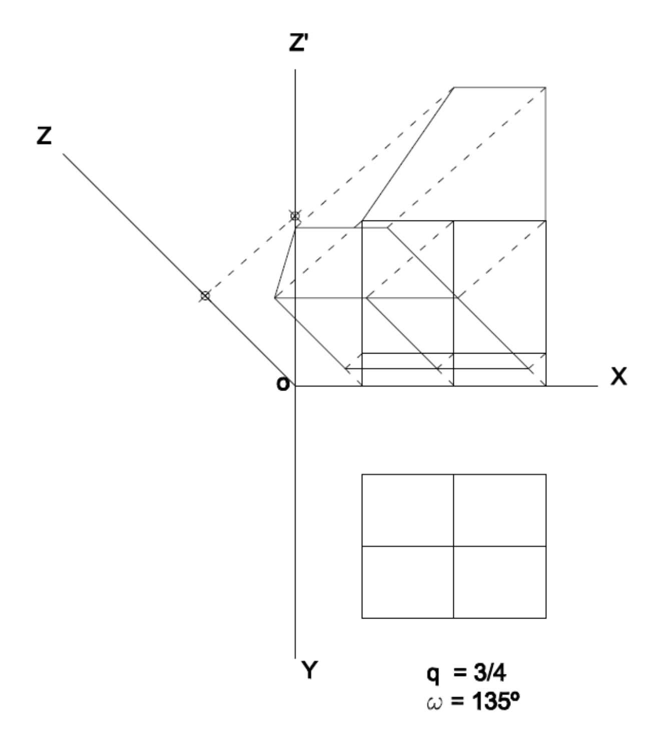


Fig. 9

El siguiente paso es la construcción de la proyección axonométrica del sólido (representación volumétrica).Para ello, se trazan paralelas al eje Z por los puntos que conforman la planta de la figura, y paralelas a Y por los puntos de la proyección axonométrica del alzado. La unión de los cortes entre las parejas de líneas así trazadas, da como resultado la representación axonométrica del objeto (Fig. 10).

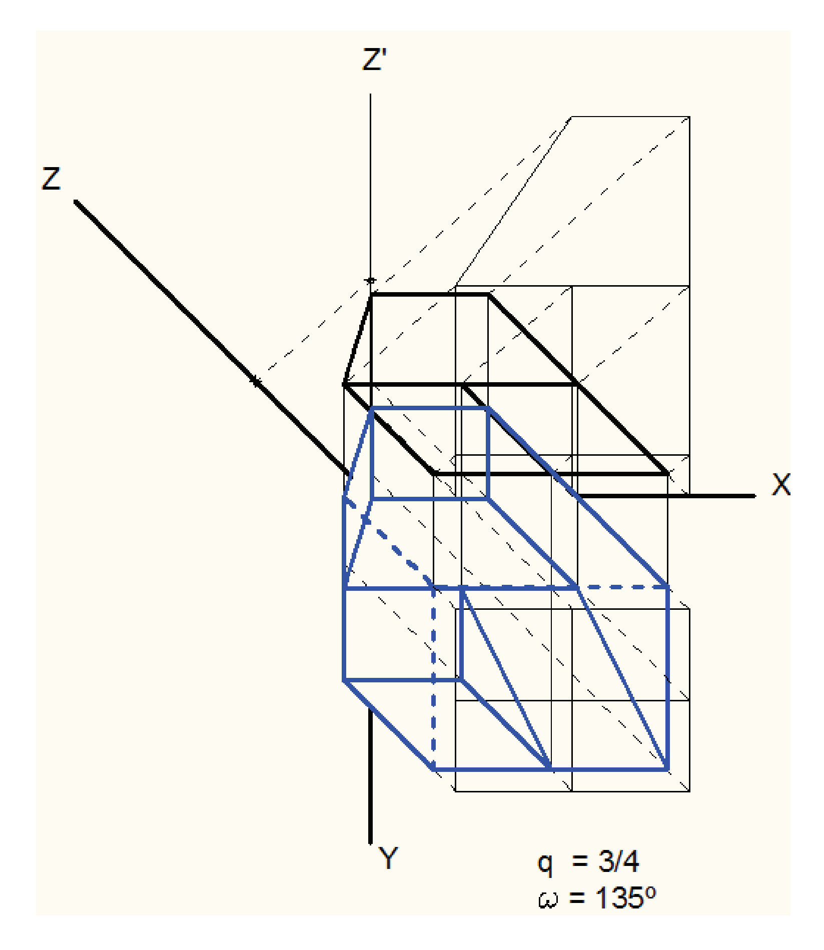


Fig. 10

SISTEMA AXONONOMÉTRICO ORTOGONAL

Generalidades

El sistema axonométrico ortogonal, perteneciente a la familia de las proyecciones cilíndricas ortogonales, se caracteriza por tener sus rayos de proyección paralelos entre sí y perpendiculares a un único plano de proyección, denominado plano del dibujo o del cuadro. Este resulta ser oblicuo a los tres planos coordenados del sistema cartesiano (XY, YZ y XZ), por lo que las direcciones correspondientes a los ejes X, Y y Z se distorsionan con relación a los ejes reales X', Y' y Z' (Fig. 11). De igual manera, los planos coordenados aparecen distorsionados en la representación.

El rayo proyectante que pasa por el origen de coordenadas o' genera sobre el plano del cuadro el punto o, el cual al ser unido con los puntos A, B y C genera las proyecciones axonométricas de los ejes coordenados X, Y y Z, también conocidas como *ejes axonométricos*.

El triangulo de vértices A, B y C se conoce como *triángulo axonométrico*, y resulta determinante a la hora de pasar del sistema diédrico al axonométrico ortogonal.

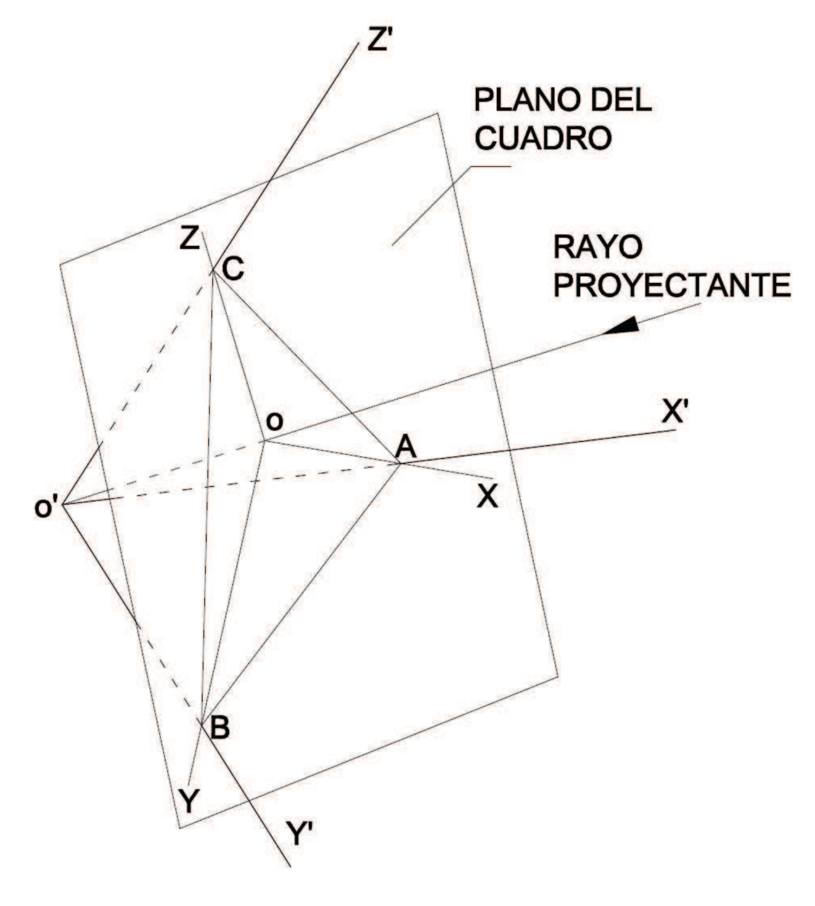


Fig. 11

En el dibujo, las proyecciones de los ejes coordenados, es decir, X, Y y Z aparecen perpendiculares a los lados del triángulo axonométrico: Z es perpendicular a AB, Y es perpendicular a BC y X es perpendicular a AC. Asimismo, dichas proyecciones forman entre sí ángulos comprendidos entre 90º y 180º, sin incluir los extremos. La suma de estos ángulos, comúnmente denominados δ, γ y λ, es igual a 360º, originándose tres variantes del sistema según el arreglo que de ellos se haga, las cuales se muestran a continuación:

Proyección Isométrica: Se obtiene si los tres ángulos mencionados son iguales entre sí, en cuyo caso cada uno tiene un valor de 120º (Fig. 12).

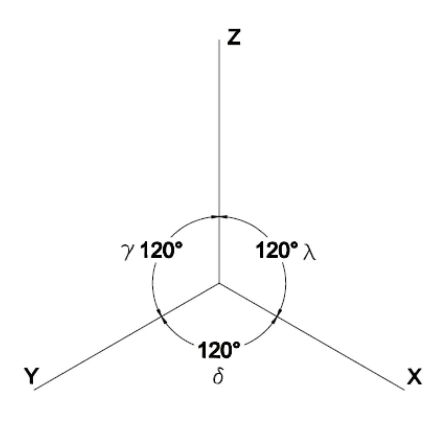


Fig. 12

Proyección Bimétrica o Dimétrica: Se obtiene si dos de los ángulos referidos son iguales entre sí y diferentes al tercero (Fig. 13-a).

Proyección Trimétrica: Se obtiene si los tres ángulos señalados son diferentes entre sí. Es, por tanto, el caso más general (Fig. 13-b).

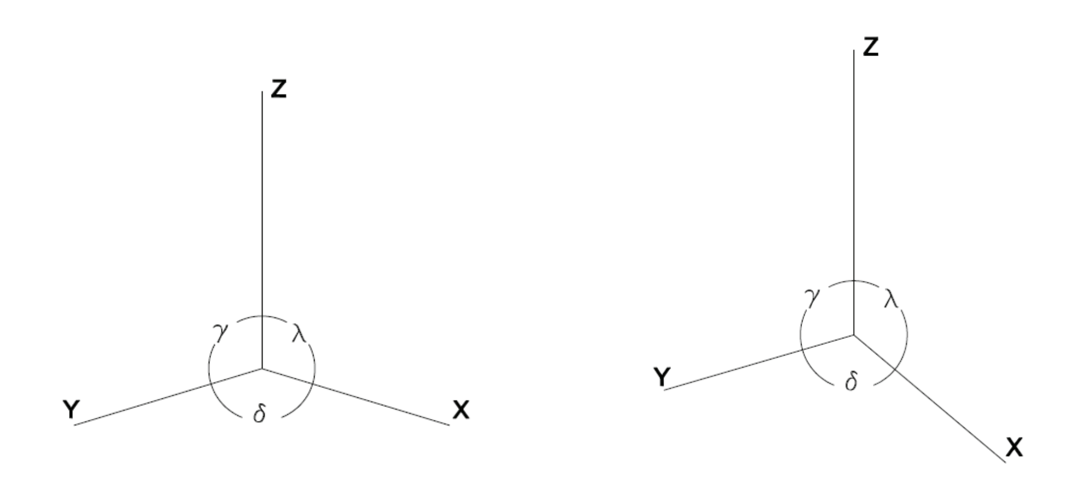


Fig. 13-a Fig. 13-b

Escalas axonométricas

Dadas las características del sistema axonométrico ortogonal, las longitudes medidas sobre los ejes coordenados se ven afectadas por los cosenos de los ángulos α, β y ε, los cuales se forman entre los ejes X', Y' y Z' y sus respectivas proyecciones X, Y y Z(Fig. 15).

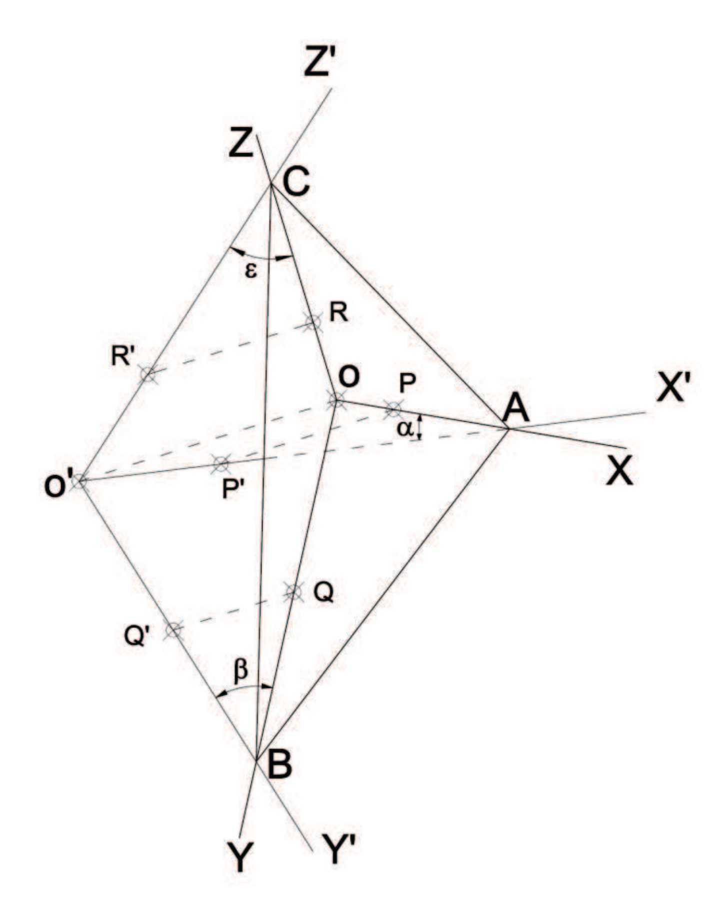


Fig. 14

Estos cosenos no son más que los *coeficientes de reducción* correspondientes a los tres ejes del sistema.

Sea O la proyección axonométrica (ortogonal sobre el plano que contiene al triángulo axonométrico ABC) del origen de coordenadas O', y sean P, Q R y S las proyecciones axonométricas de P', Q' y R', respectivamente, tal que O'P', O'Q' y O'R' corresponden a las coordenadas de un punto cualquiera del espacio. De acuerdo con la Fig. 15, se obtiene que:

$$OP = O'P' \cos\alpha\,; \quad OQ = O'Q' \cos\beta\,; \quad OR = O'R' \cos\varepsilon\,;$$

En el caso particular en el que los segmentos O'P', O'Q' y O'R' sean iguales a la unidad, sus proyecciones sobre los ejes axonométricos se denominarán, respectivamente, *m, n* y *p*, de tal forma que:

$$m = \cos\alpha\,; \;\; n = \cos\beta\,; \;\; p = \cos\varepsilon$$

Con los valores *m, n* y *p* es posible construir tres escalas gráficas o *escalas axonométricas*, las cuales permiten al diseñador determinar todas las dimensiones del objeto representado, siempre que sean paralelas a los tres ejes axonométricos (X, Y y Z). Precisamente esta característica es la que da origen a la denominación de *axonométrica* (*άξονος*: eje; *μέτρο:* medir).

La magnitud de los segmentos *m, n* y *p* (escala de las X, escala de las Y, y escala de las Z) varía según la inclinación del plano del cuadro con respecto al sistema cartesiano X'Y'Z'. De esta manera, en un sistema de proyección isométrico, se tiene que

$$m = n = p = 1$$

Ya que el plano del cuadro se inclina por igual sobre los tres ejes.

Ahora bien, si dos de estos segmentos son iguales entre sí, se tiene un sistema de proyección Bimétrica (por ejemplo: 1, 2, 2 o 3, 4, 4) en tanto que si son todos distintos, se tiene una representación Trimétrica (por ejemplo: 5, 9, 10, o 6, 7, 8).

Un sistema axonométrico ortogonal puede ser perfectamente definido a partir de la selección arbitraria de las escalas *m, n* y *p*, siempre y cuando se cumpla que:

$$m^2 < n^2 + p^2$$

$$n^2 < m^2 + p^2$$

$$p^2 < n^2 + m^2$$

Esto en vista de que el sistema de ejes X'Y'Z' debe ser un sistema rectangular.

Cálculo de los coeficientes de reducción del sistema en función de las escalas axonométricas

Ya se ha indicado que α, β y ε son los ángulos que forman los ejes del sistema cartesiano X'Y'Z' con el plano del cuadro. Sea *s* una medida de longitud hecha sobre cada uno de estos ejes coordenados.

$$\overline{O'P'} = \overline{O'Q'} = \overline{P'R'} = s$$

Se puede deducir lo siguiente:

$$\cos\alpha = \frac{m}{s}; \quad \cos\beta = \frac{n}{s}; \quad \cos\varepsilon = \frac{p}{s} \ (1)$$

Por otra parte, tomando el triángulo rectángulo OQQ' (rectángulo en Q) que se muestra en la Fig. 15 - así como los triángulos OPP' y ORR' -y aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\overline{OQ'}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QQ'}^2; \quad \overline{OP'}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{QP'}^2; \quad \overline{OR'}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{QR'}^2 \quad (2)$$

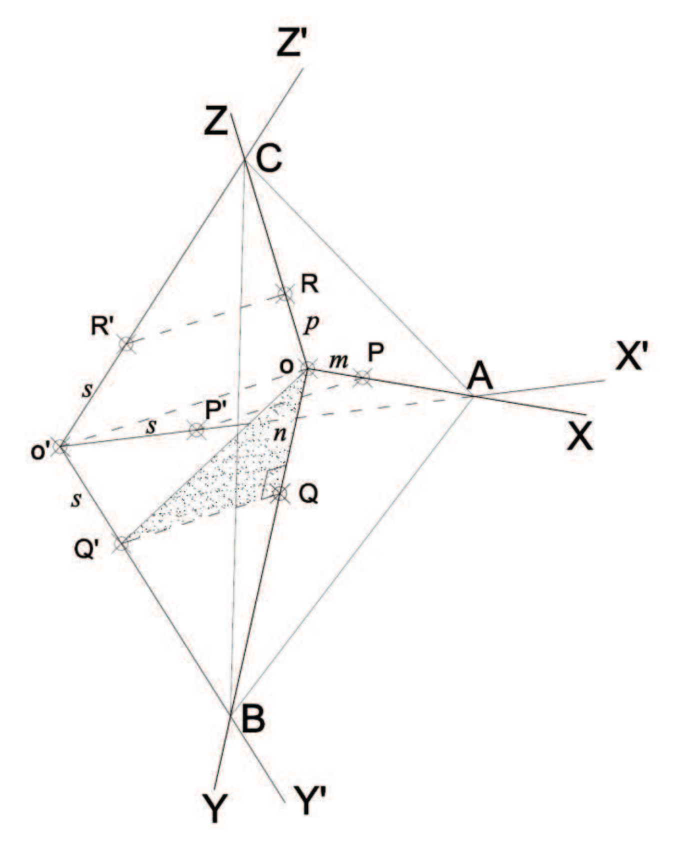


Fig. 15

Supóngase ahora que el origen del sistema de coordenadas y su proyección axonométrica coinciden. Sea OT un segmento medido sobre la perpendicular al plano del cuadro que pasa por O, con una longitud igual a *s*. Si se construye por T una recta perpendicular al eje cartesiano Y', se obtiene el punto K (Fig. 16). Si se realiza la misma operación con respecto a los demás ejes, se obtienen los puntos J y L, de manera que O'T es la hipotenusa de tres triángulos rectángulos (O'JT, O'KT y O'LT).

Los triángulos rectángulos OTK y OQ'Q tienen hipotenusas iguales a *s* (OT = OQ'), y, además, tienen los ángulos $\widehat{TOK}$y $\widehat{OQ`Q}$ también iguales, ya que ambos triángulos son

coplanarios (se encuentran sobre un plano perpendicular al plano del cuadro) y los segmentos OT y QQ' son paralelos.

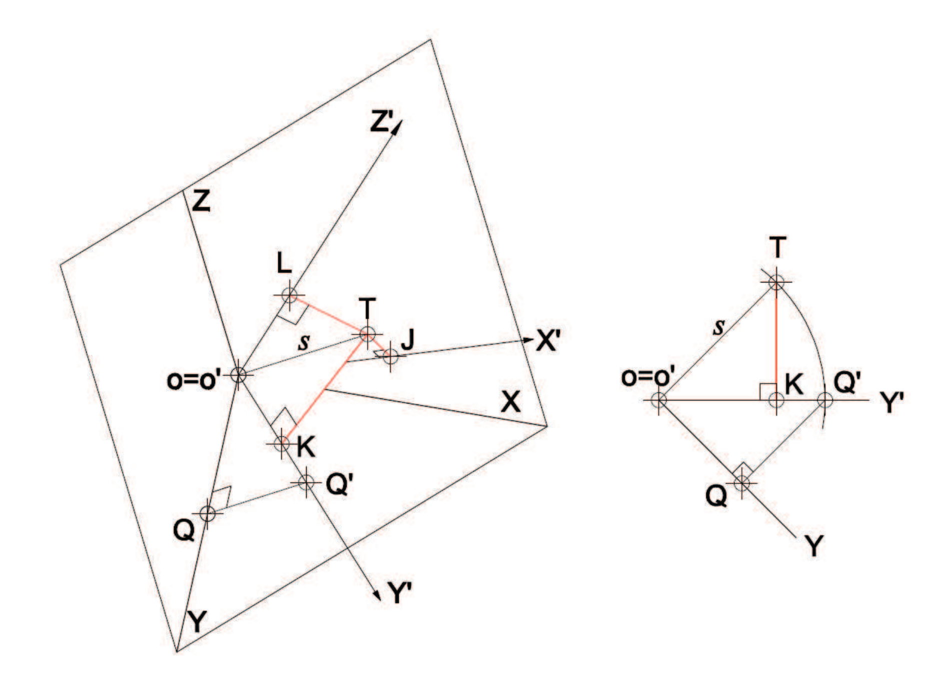


Fig. 16

De lo anterior se concluye que QQ' = OK, y siguiendo un razonamiento análogo, puede demostrarse que PP' = OJ y que RR' = OL. Si estos valores se sustituyen en las expresiones (2), se obtiene que:

$$s^2 = m^2 + \overline{OJ}^2; \quad s^2 = n^2 + \overline{OK}^2; \quad s^2 = p^2 + \overline{OL}^2$$

Sumando las tres expresiones anteriores:

$$3s^2 = m^2 + n^2 + p^2 + \overline{OJ}^2 + \overline{OK}^2 + \overline{OL}^2 \; (3)$$

Además, por geometría analítica se sabe que:

$$s^2 = \overline{OJ}^2 + \overline{OK}^2 + \overline{OL}^2$$

Así que, sustituyendo en (3) y operando, se obtiene:

$$2s^2 = m^2 + n^2 + p^2$$

De donde se obtiene[1]:

$$s = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}} \quad (4)$$

[1] Se ha tomado únicamente el signo positivo de esta expresión, a fin de considerar los cuerpos situados en el primer cuadrante, es decir, aquella región del espacio determinada por las partes positivas de los ejes del sistema cartesiano X'Y'Z'.

Finalmente, combinando las expresiones (1) y (4) se determina el siguiente juego de fórmulas que permiten relacionar los coeficientes de reducción del sistema con las correspondientes escalas axonométricas:

$$\boldsymbol{q_x = \cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{\frac{m^2+n^2+p^2}{2}}}}$$

$$\boldsymbol{q_y = \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{\frac{m^2+n^2+p^2}{2}}}} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{q_z = \cos\varepsilon = \frac{p}{\sqrt{\frac{m^2+n^2+p^2}{2}}}}$$

Cálculo de los ángulos que forman los ejes axonométricos entre sí (δ, γ y λ)

Supóngase que la distancia entre O y O' es igual a 1 y sea el triángulo rectángulo ADC de la Fig. 17. El ángulo correspondiente al vértice A se puede hallar con la siguiente expresión:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

Como los triángulos rectángulos ADC y CEO' con semejantes, se cumple que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OC}}$$

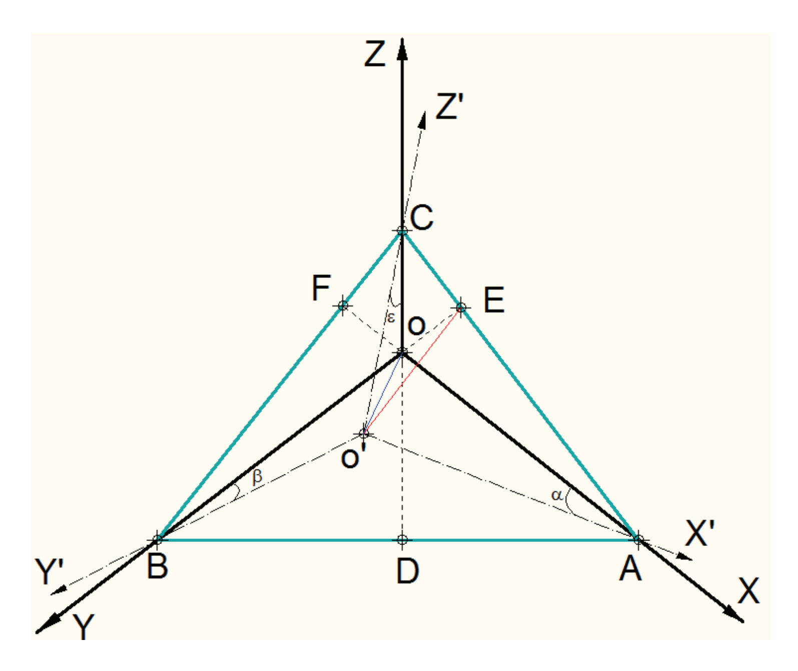


Fig. 17

De manera que, al combinar las dos expresiones anteriores, se tiene que:

$$\cos\hat{A} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OC}} \quad (6)$$

Por otra parte, el lado O'B es perpendicular a al lado O'E, dado que este último se encuentra contenido en el plano coordenado X'Z', el cual es ortogonal al eje Y', el cual contiene a O'B. Además, la recta OO' es perpendicular al plano del cuadro – que contiene al triángulo axonométrico ABC – y por lo tanto también a BE, que es la hipotenusa del triángulo BO'E, lo cual permite deducir que el ángulo $\widehat{EO'O} = \widehat{O'BO}$ y por lo tanto es igual a β. Así que del triángulo EO'O se tiene que:

$$\tan\beta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OO'}}$$

Siendo $\overline{OO'} = 1$, lo anterior se transforma en $\tan\beta = \overline{OE}$.

Por analogía, se puede deducir del triángulo CO'O lo siguiente:

$$\tan\varepsilon = \frac{\overline{OO'}}{\overline{CO}} = \frac{1}{\overline{CO}}$$

$$\overline{CO} = \frac{1}{\tan\varepsilon}$$

Sustituyendo lo anterior en (6), se obtiene:

$$\cos\hat{A} = \frac{\tan\beta}{\frac{1}{\tan\varepsilon}} = \tan\beta\tan\varepsilon$$

Siguiendo un razonamiento similar se pueden obtener los cosenos de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ del triángulo axonométrico. De manera que se tienen las siguientes expresiones:

$$\cos\hat{A} = \tan\beta\tan\varepsilon$$

$$\cos\hat{B} = \tan\alpha\tan\varepsilon \quad (7)$$

$$\cos\hat{A} = \tan\alpha\tan\beta$$

Para expresar estos resultados en función de las escalas axonométricas *m, n* y *p*, se parte de la expresión (1) elevada al cuadrado:

$$\cos^2\alpha = \frac{m^2}{s^2}$$

Y sabiendo que $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, se llega a lo siguiente:

$$\sin^2\alpha = \frac{s^2 - m^2}{s^2}$$

Dividiendo ambos miembros por $\cos^2\alpha$ se obtiene:

$$\tan^2\alpha = \frac{s^2 - m^2}{s^2\cos^2\alpha}$$

Es decir:

$$\tan^2\alpha = \frac{s^2 - m^2}{m^2}$$

Por analogía, se puede afirmar que:

$$\tan^2\beta = \frac{s^2 - n^2}{n^2}$$

Al multiplicar las dos expresiones anteriores, se obtiene lo siguiente:

$$\tan^2\alpha \tan^2\beta = \left(\frac{s^2 - m^2}{m^2}\right)\left(\frac{s^2 - n^2}{n^2}\right)$$

Aplicando raíz cuadrada a cada miembro:

$$\tan\alpha \tan\beta = \frac{\sqrt{(s^2 - m^2)(s^2 - n^2)}}{mn}$$

Al sustituir esta expresión en la tercera fórmula del conjunto (7) se obtiene que:

$$\cos\hat{C} = \frac{\sqrt{(s^2 - m^2)(s^2 - n^2)}}{mn}$$

De la misma forma se obtienen las expresiones para los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ en términos de sus cosenos:

$$\cos\hat{A} = \frac{\sqrt{(s^2 - n^2)(s^2 - p^2)}}{np}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{\sqrt{(s^2 - m^2)(s^2 - p^2)}}{mp}$$

$$\cos\hat{C} = \frac{\sqrt{(s^2 - m^2)(s^2 - n^2)}}{mn}$$

Ahora bien, en la Fig. 18 puede observarse que el cuadrilátero AEOD tiene ángulos rectos en D y en E, lo cual permite deducir que el ángulo $\widehat{EOD}$ es suplementario del

ángulo $\hat{A}$. También se puede observar en esa figura que el ángulo $\widehat{EOD}$ es opuesto por el vértice al ángulo γ, y por lo tanto estos últimos son iguales entre sí. Un razonamiento análogo es válido para los otros dos ángulos entre ejes axonométricos (λ y δ).

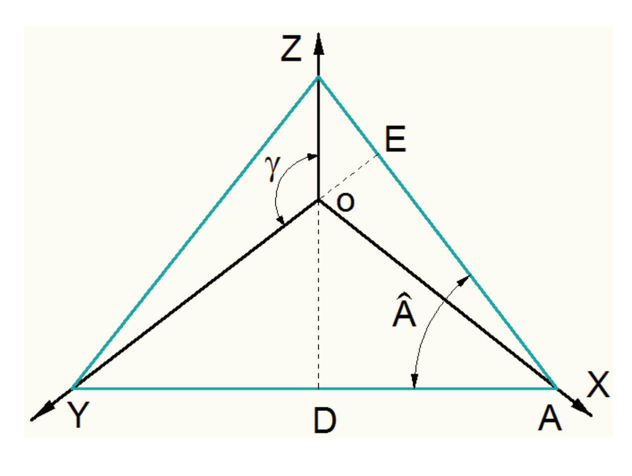


Fig. 18

De manera que hallando los ángulos suplementarios de los valores $\hat{A}$, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ que se obtienen de las expresiones anteriores, se encuentran los valores de los ángulos γ, λ y δ, respectivamente, que es lo que se estaba buscando. En definitiva:

$$\boldsymbol{\gamma = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(s^2 - n^2)(s^2 - p^2)}}{np}\right)}$$

$$\boldsymbol{\lambda = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(s^2 - m^2)(s^2 - p^2)}}{mp}\right)} \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\delta = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(s^2 - m^2)(s^2 - n^2)}}{mn}\right)}$$

A manera de ejemplo, se presenta el siguiente ejercicio:

Se desea realizar la representación de un punto A (10, 20, 15). El dibujante ha optado por trabajar en sistema axonométrico ortogonal en un esquema trimétrico con escalas axonométricas (m, n y p) iguales a 5, 9 y 10. Calcular los coeficientes de reducción y los ángulos que forman entre sí los ejes axonométricos.

Se tienen los valores de *m = 5, n = 9 y p = 10.* En primer lugar, se debe comprobar la viabilidad de esta terna de valores. Para ello se verifica el cumplimiento de las desigualdades:

$$m^2 < n^2 + p^2 \rightarrow 5^2 < 9^2 + 10^2 \rightarrow 25 < 181$$

$$n^2 < m^2 + p^2 \rightarrow 9^2 < 5^2 + 10^2 \rightarrow 81 < 125$$

$$p^2 < n^2 + m^2 \rightarrow 10^2 < 9^2 + 5^2 \rightarrow 100 < 106$$

Verificadas las desigualdades, a continuación se aplican las ecuaciones (5) para calcular los coeficientes de reducción del sistema

$$q_x = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{\frac{5^2+9^2+10^2}{2}}} = \mathbf{0,493}$$

$$q_y = \cos\beta = \frac{9}{\sqrt{\frac{5^2+9^2+10^2}{2}}} = \mathbf{0,887}$$

$$q_z = \cos\varepsilon = \frac{10}{\sqrt{\frac{5^2+9^2+10^2}{2}}} = \mathbf{0,985}$$

Para poder continuar, se requiere determinar el parámetro *s* usando la ecuación (4):

$$s = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}} = \sqrt{\frac{5^2 + 9^2 + 10^2}{2}} = 10{,}149$$

Ahora se determinan los ángulos que forman entre sí los ejes axonométricos X, Y y Z, empleando las ecuaciones (8):

$$\gamma = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(10{,}149^2 - 9^2)(10{,}149^2 - 10^2)}}{(9)(10)}\right) = 95{,}179°\ (\mathbf{95°10'44''})$$

$$\lambda = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(10{,}149^2 - 5^2)(10{,}149^2 - 10^2)}}{(5)(10)}\right) = 107{,}815°\ (\mathbf{107°48'54''})$$

$$\delta = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(10{,}149^2 - 5^2)(10{,}149^2 - 9^2)}}{(5)(9)}\right) = 157{,}006°\ (\mathbf{157°0'22''})$$

Una vez determinada toda esa información, se trazan los ejes axonométricos X, Y y Z de acuerdo con los valores angulares γ, λ y δ, para luego proceder a consignar sobre cada uno de ellos las correspondientes coordenadas del punto A (que están referidas al sistema X'Y'Z'), multiplicadas por el respectivo coeficiente de reducción:

$$X_A = q_x X'_A \rightarrow X_A = (0{,}493)(10) \rightarrow X_A = 4{,}93$$

$$Y_A = q_y Y'_A \rightarrow Y = (0{,}887)(20) \rightarrow Y_A = 17{,}74$$

$$Z_A = q_z Z'_A \rightarrow Z_A = (0{,}985)(15) \rightarrow Z_A = 14{,}77$$

Finalmente, se dibujan paralelas a los ejes axonométricos por los puntos resultantes, generando la proyección de un paralelepípedo, siendo el vértice ubicado en el primer cuadrante la proyección axonométrica del punto A. También se pueden observar las proyecciones del punto A sobre cada uno de los tres planos coordenados del sistema (A^v, A^h, A^l). El resultado se muestra en la Fig. 19.

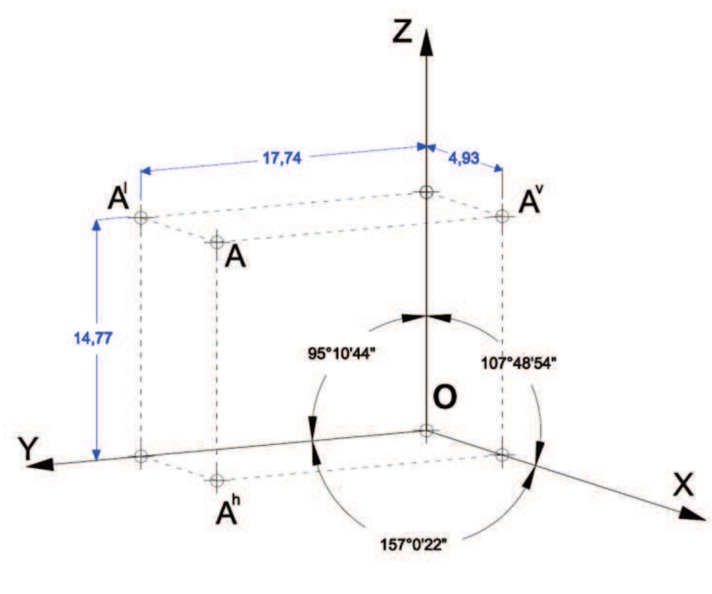


Fig. 19

Supóngase ahora que se desea construir la proyección axonométrica del sólido cuyas vistas ortogonales se muestran en la Fig. 20. El esquema a emplearse es bimétrico, con escalas axonométricas 1, 2, 2, siguiendo el método directo y utilizando los coeficientes de reducción.

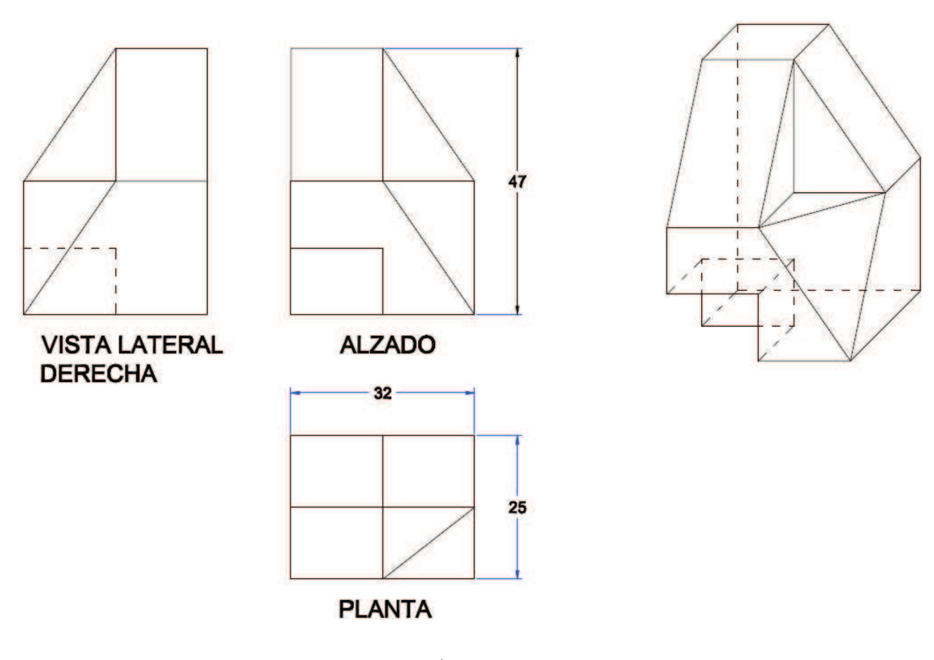


Fig. 20

En primer lugar deben efectuarse los cálculos requeridos para encontrar los coeficientes de reducción y los ángulos que forman entre si los ejes axonométricos. Como se trata de un esquema bimétrico con escalas 1, 2, 2 ($n = p$), se cumplirá que:

$$\cos\beta = \cos\varepsilon$$

$$\delta = \lambda$$

Los cálculos requeridos son los siguientes:

$$q_x = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{1^2+2^2+2^2}{2}}} = \mathbf{0,471}$$

$$q_z = q_y = \cos\beta = \cos\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\frac{1^2+2^2+2^2}{2}}} = \mathbf{0,943}$$

$$s = \sqrt{\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 2^2 + 2^2}{2}} = 2{,}121$$

$$\gamma = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(2{,}121^2 - 2^2)(2{,}121^2 - 2^2)}}{(2)(2)}\right) = 97{,}181 = \mathbf{97°10'50''}$$

$$\delta = \lambda = 180° - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(2{,}212^2 - 1^2)(2{,}212^2 - 2^2)}}{(1)(2)}\right) = 131{,}409 = \mathbf{131°24'35''}$$

Una vez hechos estos cálculos, se dibujan los ejes axonométricos X, Y y Z de acuerdo con los valores angulares γ, λ y δ obtenidos, para luego proceder a consignar sobre cada uno de ellos las dimensiones de la pieza (ancho, profundidad y altura reales, respectivamente), multiplicadas por el respectivo coeficiente de reducción:

$$Ancho = q_x(Ancho\ real) \rightarrow Ancho = (0{,}471)(32) \rightarrow Ancho = 15{,}07$$

$$Prof = q_y(Prof.real) \rightarrow Prof = (0{,}943)(25) \rightarrow Prof = 23{,}58$$

$$Altura = q_z(Altura\ real) \rightarrow Altura = (0{,}943)(47) \rightarrow Altura = 44{,}32$$

Seguidamente, se dibujan las proyecciones de la pieza (solamente dos son suficientes) sobre los planos coordenados en el sistema axonométrico, aprovechando los puntos medios y las relaciones de paralelismo (Fig. 21)

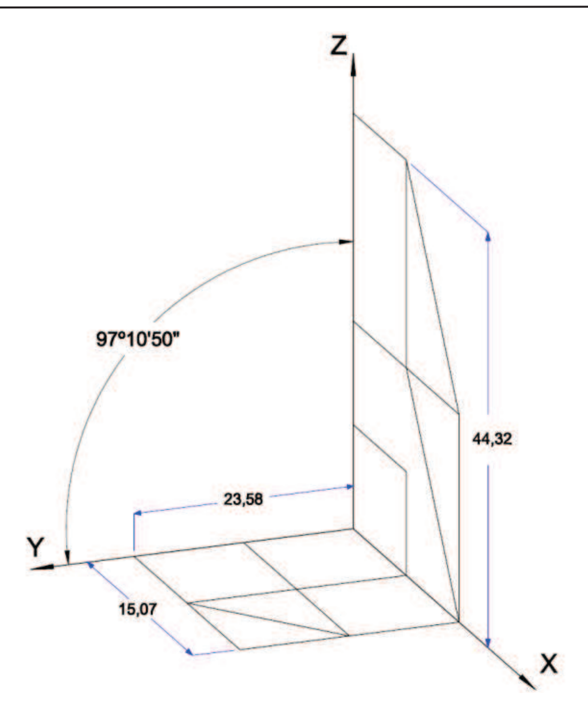


Fig. 21

Ahora, se debe "levantar" la proyección volumétrica del sólido. Para ello, se trazan líneas paralelas a Z desde cada vértice de la proyección sobre el plano coordenado XY (planta del objeto en el sistema axonométrico), y líneas paralelas a Y desde los vértices de la proyección sobre el plano XZ (alzado del objeto en el sistema axonométricos). Los cortes correspondientes a vértices del objeto se unen de manera lógica y coherente, respetando la visibilidad del mismo. El resultado se muestra en la Fig. 22.

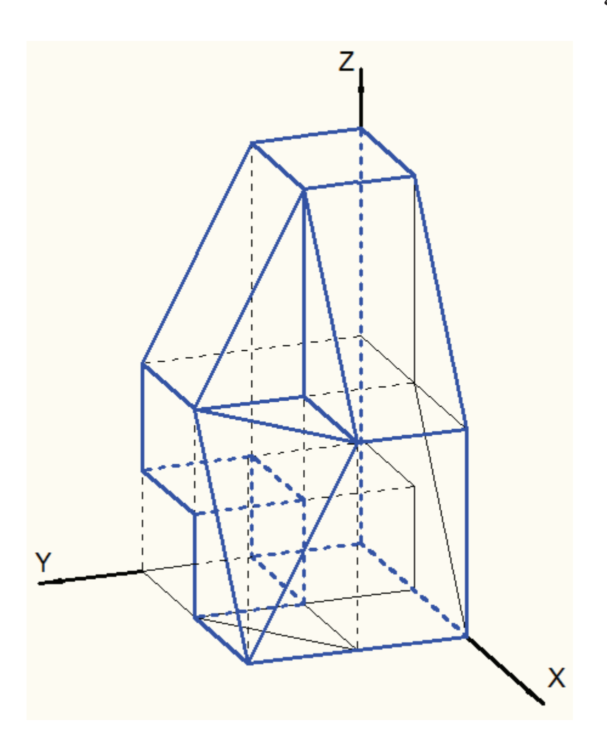


Fig. 22

Cálculo de los coeficientes de reducción del sistema en función de los ángulos que forman los ejes axonométricos entre sí

Es frecuente ejecutar la representación axonométrica de un objeto partiendo de los valores de los ángulos que forman los ejes axonométricos entre sí (δ, γ y λ). En ese caso, es necesario deducir una expresión matemática para cada uno de los coeficientes de reducción del sistema, en función de dichos valores angulares.

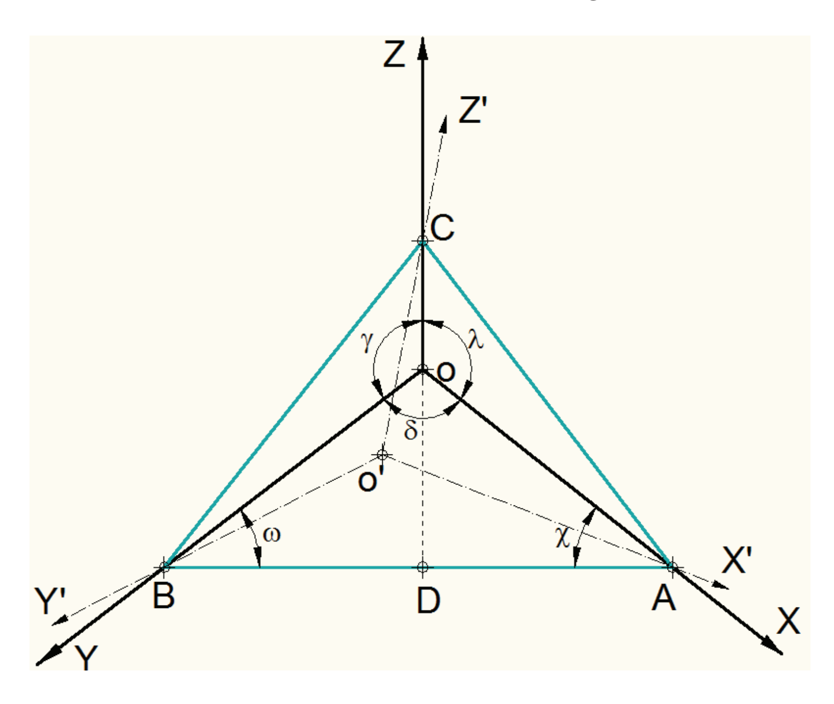


Fig. 23

Sea entonces la Fig. 23. Aplicando el Teorema de Pitágoras para el triángulo AO'B, se tiene que:

$$\overline{AB}^2 = \overline{O'A}^2 + \overline{O'B}^2 \quad (9)$$

Por otra parte, la Ley del Coseno, aplicada al triángulo AOB, resulta en:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OB}\cos\delta \quad (10)$$

Igualando (9) y (10) se llega a lo siguiente:

$$\overline{O'A}^2 + \overline{O'B}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OB}\cos\delta \quad (11)$$

Análogamente, se cumple que:

$$\overline{O'B}^2 + \overline{O'C}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OB}\,\overline{OC}\cos\gamma \quad (12)$$

$$\overline{O'A}^2 + \overline{O'C}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OC}\cos\lambda \quad (13)$$

Ahora bien, si se toman los triángulos BOD y AOD, puede observarse que:

$$\overline{OD} = \overline{OB}\sin\omega \quad y \quad \overline{OD} = \overline{OA}\sin\chi$$

Igualando ambas expresiones, se llega a lo siguiente:

$$\overline{OB}\sin\omega = \overline{OA}\sin\chi$$

Además, de la figura se deduce que:

$$\sin\omega = -\cos\gamma \quad y \quad \sin\chi = -\cos\lambda$$

Por lo que se puede afirmar que:

$$\overline{OB}\cos\gamma = \overline{OA}\cos\lambda \qquad (14)$$

Y análogamente:

$$\overline{OB}\cos\delta = \overline{OC}\cos\lambda \qquad (15)$$

Despejando $\overline{O'C}$ de la expresión (12) se obtiene:

$$\overline{O'C}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OC}\,\overline{OB}\cos\gamma - \overline{O'B}^2 \qquad (16)$$

Haciendo lo mismo con la expresión (13) se obtiene:

$$\overline{O'A}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OC}\cos\lambda - \overline{O'C}^2 \qquad (17)$$

Sustituyendo (16) en (17) y operando, se llega a lo siguiente:

$$\overline{O'A}^2 = \overline{OA}^2 - 2\overline{OA}\,\overline{OC}\cos\lambda - \overline{OB}^2 + 2\overline{OC}\,\overline{OB}\cos\gamma + \overline{O'B}^2 \qquad (18)$$

Ahora bien, de las expresiones (14) y (15) se tiene que:

$$\overline{OA} = \frac{\overline{OB}\cos\gamma}{\cos\lambda} \qquad (19)$$

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OB}\cos\delta}{\cos\lambda} \qquad (20)$$

Si se sustituye (20) en la expresión (11), se obtiene lo siguiente:

$$\overline{O'B}^2 + \overline{O'A}^2 = \overline{OB}^2 + \left(\frac{\overline{OB}\cos\gamma}{\cos\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{\overline{OB}\cos\gamma}{\cos\lambda}\right)\overline{OB}\cos\delta \qquad (21)$$

Y sustituyendo (19) y (20) en (21) se obtiene:

$$\overline{O'A}^2 = \left(\frac{\overline{OB}\cos\gamma}{\cos\lambda}\right)^2 - 2\left(\frac{\overline{OB}\cos\gamma}{\cos\lambda}\right)\left(\frac{\overline{OB}\cos\delta}{\cos\lambda}\right)\cos\lambda - \overline{OB}^2 + 2\left(\frac{\overline{OB}\cos\delta}{\cos\lambda}\right)\overline{OB}\cos\gamma + \overline{O'B}^2$$

$$\overline{O'A}^2 = \overline{O'B}^2 - \overline{OB}^2 + \frac{\overline{OB}^2\cos^2\gamma}{\cos^2\lambda} \qquad (22)$$

Ahora, sustituyendo lo anterior en la expresión (21) y desarrollando, se llega a lo siguiente:

$$2\overline{O'B}^2 = 2\overline{OB}^2 - 2\overline{OB}^2 \frac{\cos\gamma\cos\delta}{\cos\lambda}$$

Dividiendo lo anterior por $2\overline{OB}^2$:

$$\frac{\overline{O'B}^2}{\overline{OB}^2} = 1 - \frac{\cos\gamma\cos\delta}{\cos\lambda}$$

Invirtiendo ambos lados de la ecuación:

$$\frac{\overline{OB}^2}{\overline{O'B}^2} = \frac{1}{1 - \frac{\cos\gamma\cos\delta}{\cos\lambda}}$$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{O'B}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos\gamma\cos d}{\cos\lambda}}}$$

Pero se sabe que:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{O'B}} = \cos\beta = q_y$$

Por lo que:

$$\boldsymbol{q_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos\gamma\cos\delta}{\cos\lambda}}}}$$

Y análogamente, rotando γ, δ y λ en el segundo miembro, se obtienen las expresiones correspondientes para q_x y q_z.

$$\boldsymbol{q_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos\lambda\cos\delta}{\cos\gamma}}}} \qquad (23)$$

$$\boldsymbol{q_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos\gamma\cos\lambda}{\cos\delta}}}}$$

Considérese ahora el siguiente ejemplo.

Se desea realizar la representación del sólido cuyas vistas ortogonales se muestran en la Fig. 24. El dibujante ha optado por trabajar en sistema axonométrico ortogonal en un esquema bimétrico con los siguientes valores angulares:

$$\delta = 110°; \ \ \gamma = 125°; \ \ \ \lambda = 125°$$

Calcular los coeficientes de reducción.

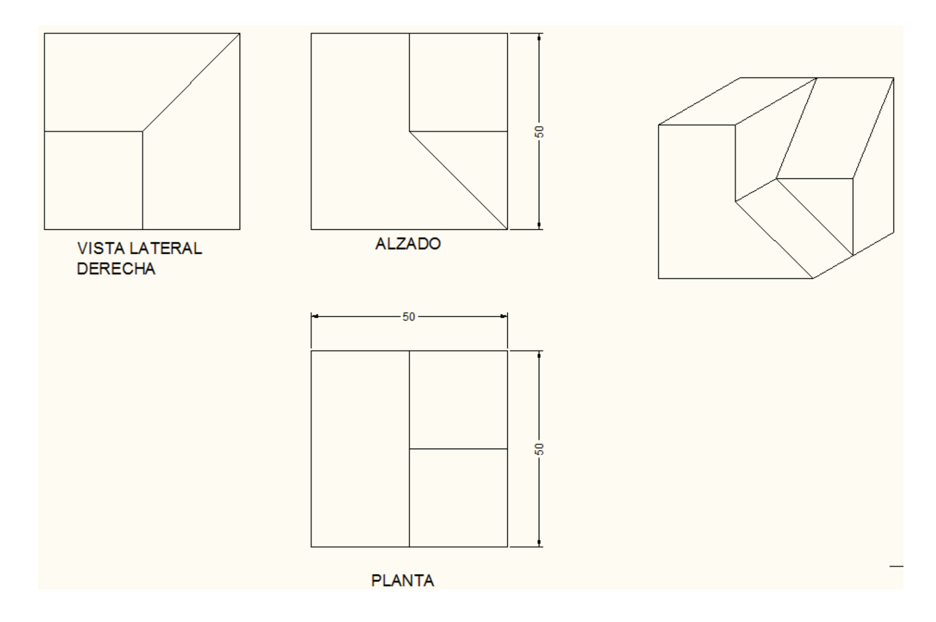


Fig. 24

Calcúlese en primer lugar los coeficientes de reducción para las tres direcciones fundamentales en sistema axonométrico:

$$q_x = q_y \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos\lambda \cos\delta}{\cos\gamma}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos(125°)\cos(110°)}{\cos(125°)}}} = 0{,}70728$$

$$q_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos\gamma \cos\lambda}{\cos\delta}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos(115°)\cos(135°)}{\cos(110°)}}} = 0{,}78541$$

Realizado lo anterior, se procede a trazar los ejes axonométricos (X, Y y Z) de acuerdo con los valores angulares γ, λ y δ dados, para luego proceder a consignar sobre cada uno de ellos las dimensiones del objeto (ancho, profundidad y altura reales, respectivamente, que en este ejemplo son iguales a 50 unidades), multiplicadas por el respectivo coeficiente de reducción:

$$Ancho = q_x(Ancho\ real) \rightarrow Ancho = (0{,}70728)(50) \rightarrow Ancho = 35{,}36$$

$$Prof = q_y(Prof.real) \rightarrow Prof = (0{,}70728)(50) \rightarrow Prof = 35{,}36$$

$$Altura = q_z(Altura\ real) \rightarrow Altura = (0{,}78541)(50) \rightarrow Altura = 39{,}27$$

Luego, se dibujan las proyecciones del objeto (dos son suficientes) sobre los planos coordenados en el sistema axonométrico, aprovechando los puntos medios y las relaciones de paralelismo (Fig. 25).

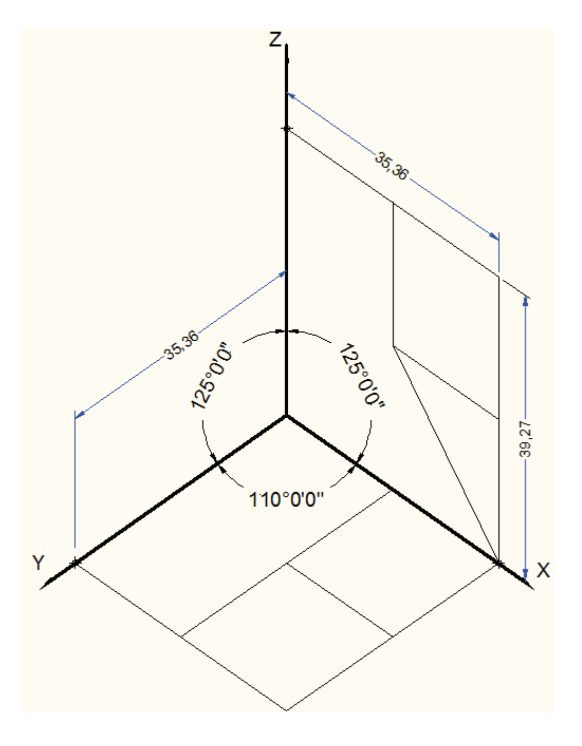


Fig. 25

Finalmente, se debe "levantar" la proyección volumétrica del sólido. El resultado se muestra en la Fig. 26.

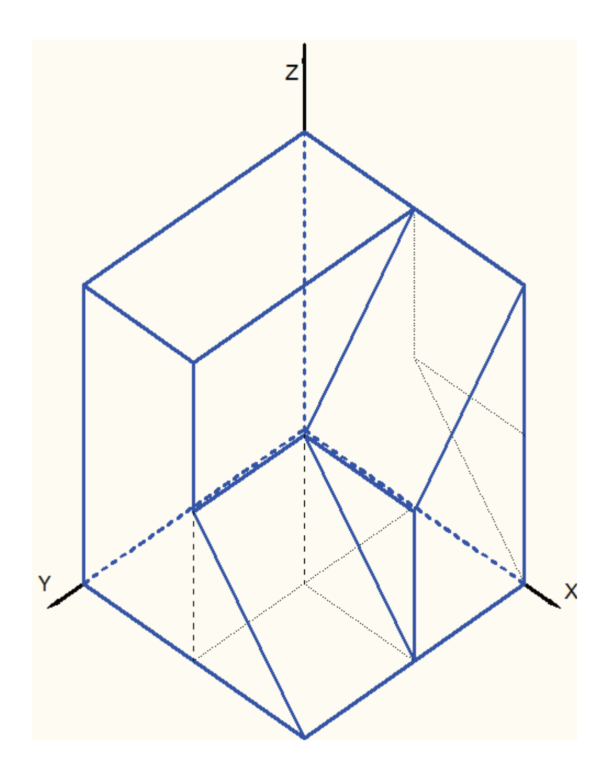


Fig. 26

Método Gráfico. Abatimiento de los planos coordenados

También es posible representar objetos en el sistema axonométrico ortogonal sin realizar operaciones aritméticas. Se trata de un *método gráfico* para obtener los ejes coordenados en verdadera magnitud, el cual consiste en abatir sobre el plano del cuadro y alrededor de los lados del triángulo axonométrico, el origen de coordenadas del sistema.

Supóngase que se requiere obtener la proyección axonométrica de un punto P, cuyas coordenadas X'_P, Y'_P y Z'_P se conocen. Se conocen también, evidentemente, los valores δ=100º, γ=120º y λ=140º. Una vez trazados los ejes axonométricos X, Y y Z, de acuerdo con los valores angulares preestablecidos, se procede a construir el triángulo axonométrico ABC de la siguiente forma (Fig. 27):

1. Se selecciona un punto cualquiera A sobre el eje X.
2. Se traza una línea recta perpendicular a Z por ese punto A, la cual corta al eje Y en el punto B.
3. Por B, se dibuja una línea recta perpendicular al eje X, la cual corta al eje Z en C.

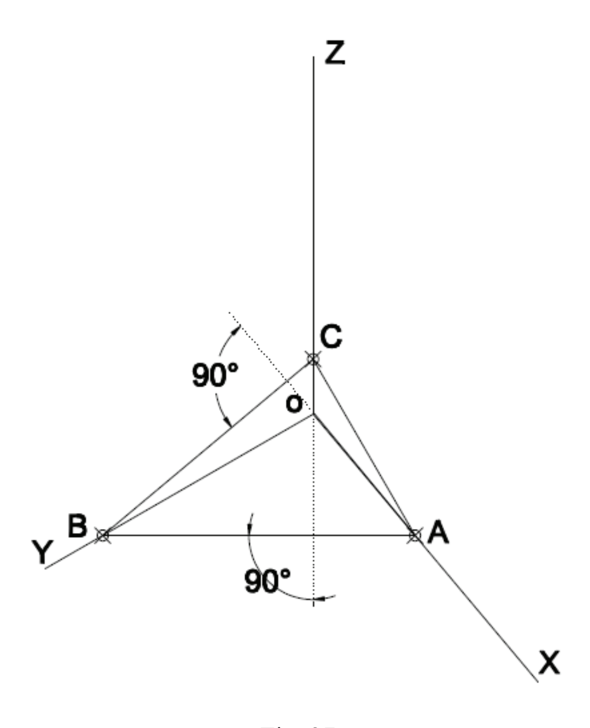


Fig. 27

Una vez hecho lo anterior, se procede al abatimiento de la proyección del origen de coordenadas (O) tomando como eje al segmento AB, siguiendo los siguientes pasos (Fig. 28):

1. Trasladar el segmento AB una distancia arbitraria en forma perpendicular a él mismo, hasta obtener A_1 y B_1, a fin de evitar superposiciones en el dibujo.
2. Determinar el punto medio M del segmento A_1B_1.
3. Dibujar una semicircunferencia de centro en M y radio MA_1.
4. Trazar por la proyección del origen de coordenadas (O) una línea recta perpendicular a AB.
5. Hallar el corte entre la recta anterior y la semicircunferencia trazada, con lo cual se obtiene O', que no es más que el origen de coordenadas abatido.

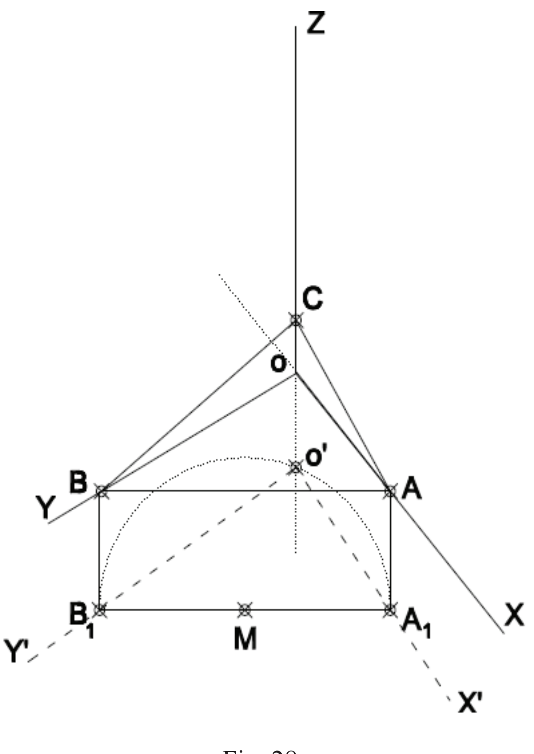


Fig. 28

6. Unir O' con A_1 y B_1; se obtienen los ejes X' y Y'.

Hecho esto, se sigue un procedimiento análogo para obtener los ejes X' y Z' (Fig. 29), abatiendo la proyección del origen alrededor del segmento A_1C_1.

De esta manera, es posible consignar los valores de las coordenadas del punto P en verdadera magnitud sobre X', Y' y Z', obteniéndose P^h y P^v (proyecciones diédricas de P).

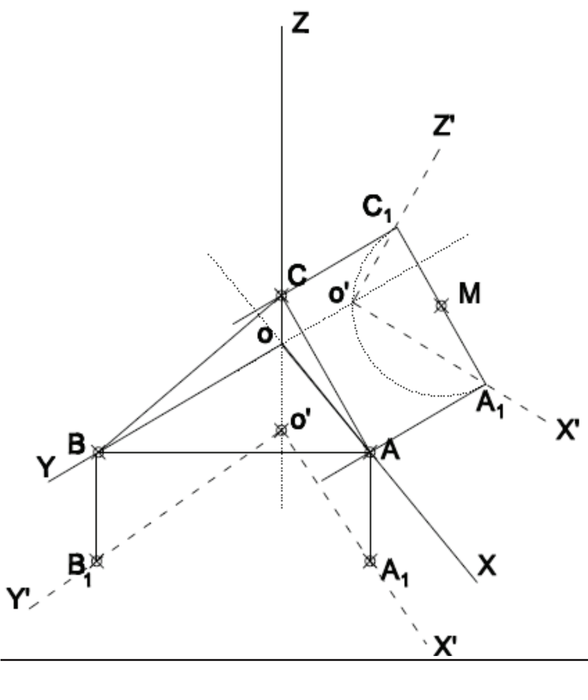


Fig. 29

Una vez determinados los ejes coordenados en verdadera magnitud, se miden sobre ellos las coordenadas del punto P (X_P, Y_P y Z_P), obteniéndose P^v y P^h (Fig. 30).

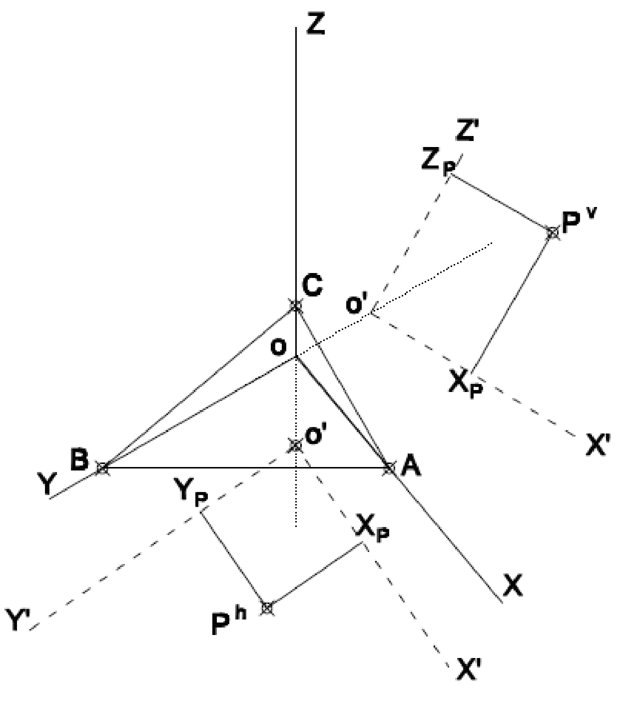


Fig. 30

Seguidamente, se traza por P^h una línea recta paralela a Z, y por P^v otra paralela a Y. Ambas líneas se cortan en el punto P, el cual constituye la proyección axonométrica del punto P (Fig. 31).

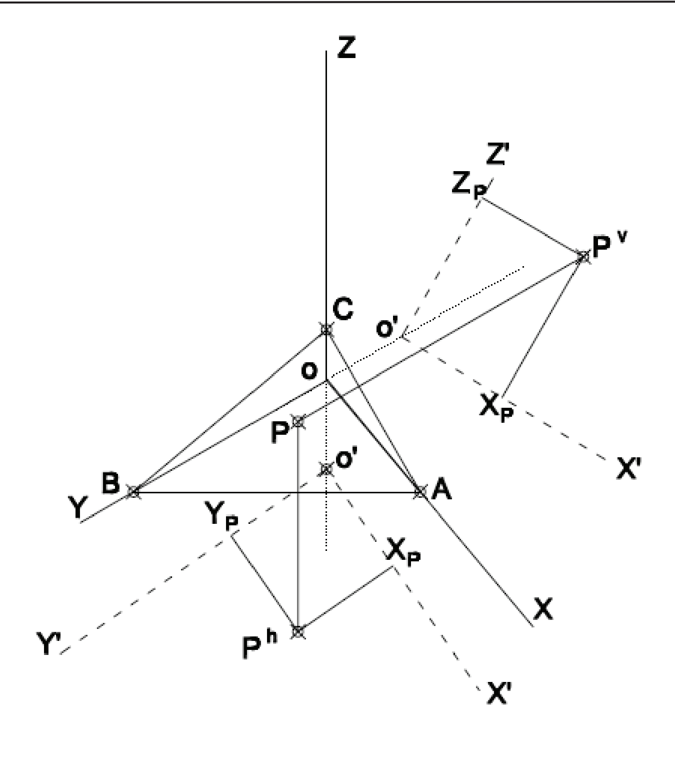


Fig. 31

La construcción de la proyección axonométrica ortogonal de un objeto tridimensional, no es más que la determinación de de la proyección de todos sus vértices, siguiendo el procedimiento detallado anteriormente, el cual consiste en el abatimiento de los planos coordenados del sistema X'Y'Z'. Sea el objeto ya abordado en sistema axonométrico oblicuo (Fig. 5), y sean δ=100º, γ=120ª y λ=140º, los ángulos que definen al sistema.

Una vez trazados los ejes X, Y y Z, y abatidos los planos coordenados XY y XZ de acuerdo con el método ya expuesto, se procede a copiar la planta de la figura adosada a X' y Y', de forma lógica y coherente. De la misma forma, se copia el alzado adosado a X' y Z', tal como se muestra en la Fig. 32.

Luego, se trazan por los puntos de la planta líneas rectas paralelas a Z, y por los puntos del alzado, líneas rectas paralelas a Y. Los cortes entre ambos grupos de rectas, hallados de forma coherente y ordenada según las características del objeto, dan como resultado las proyecciones axonométricas ortogonales de los vértices de dicho objeto. La imagen resultante ofrece una cierta ilusión de volumen que permite a quien la percibe una percepción bastante cercana a la realidad de la forma y proporciones del sólido (Fig. 33).

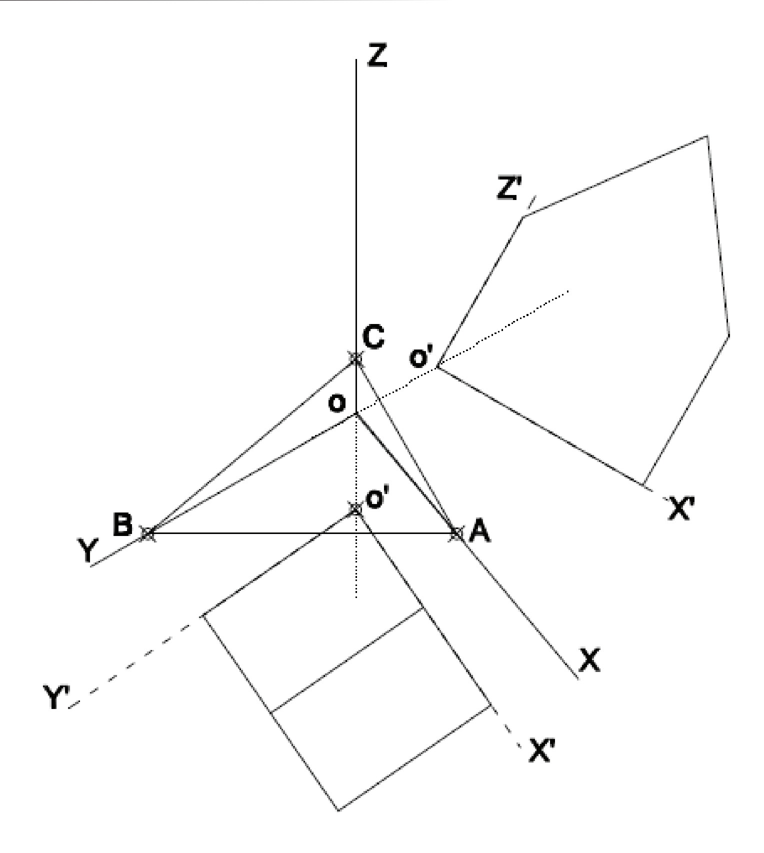


Fig. 32

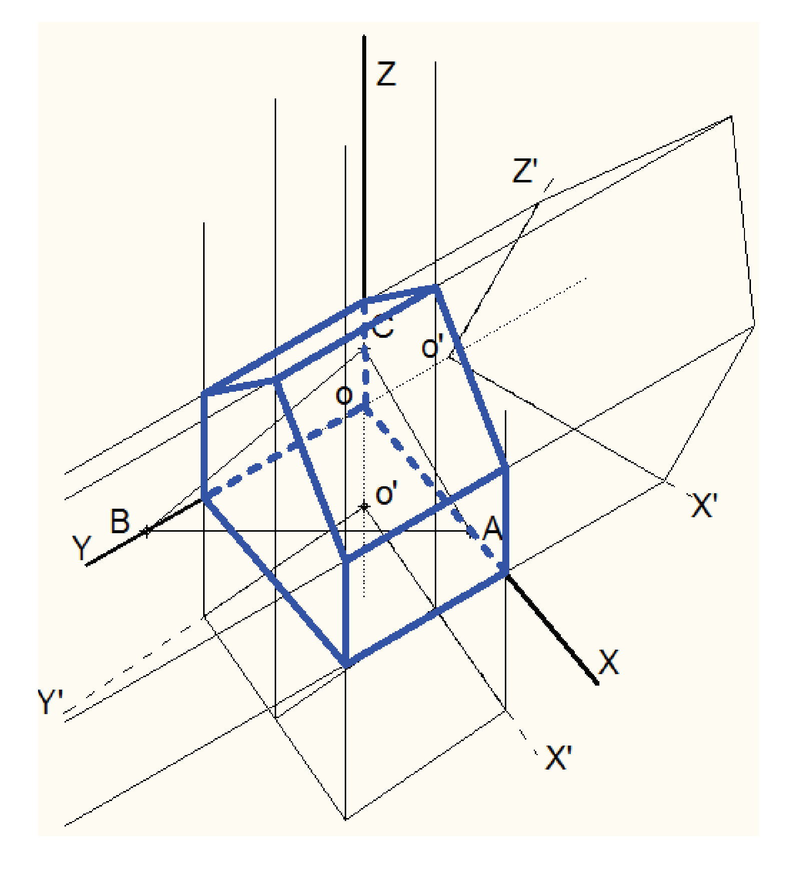


Fig. 33

ESTRATEGIAS PARA LA VISUALIZACIÓN DE PIEZAS A PARTIR DE SUS VISTAS ORTOGONALES

Dibujar una pieza en proyección axonométrica no es un proceso completamente lineal que se pueda repetir de forma mecánica y obtener siempre el resultado correcto. Es necesario un esfuerzo mental que permita pasar de las vistas en dos dimensiones a la representación volumétrica, una representación del objeto que nos provee una *ilusión* de tres dimensiones. Las estrategias que se presentan a continuación permiten ejecutar la representación de la pieza, al tiempo que se facilita su visualización espacial.

1. Dibujar el paralelepípedo envolvente

Este debe ser el primer paso. Se trata de delinear el paralelepípedo que contiene a toda la pieza en su interior. Las ventajas de esta técnica son las siguientes:

- Facilidad para medir: Con el volumen envolvente dibujado es más fácil consignar medidas en la dirección de los ejes coordenados.
- Facilidad para ubicar convenientemente el objeto en su posición adecuada: Puesto que el paralelepípedo es un volumen relativamente sencillo, es relativamente fácil captar las características morfológicas de la pieza
- Se minimiza la posibilidad de bloqueo mental: Quizá la principal ventaja de este primer paso es el hecho de evitar el miedo al papel en blanco. Entender una pieza completamente desde sus vistas no es sencillo; en cambio, si se comienza de esta manera que es un poco más mecánica, se avanza en la dirección adecuada y poco a poco se irá visualizando la pieza.

Para dibujar el volumen envolvente, conviene efectuar las siguientes actividades.

a. Dibujar los ejes:

Debe realizarse de conformidad con el sistema requerido (Isometría, Bimetría, Trimetría, Caballera, Militar)

b. Decidir la posición de la pieza:

Es decir, dónde van el Alzado y el Perfil, ya que normalmente la pieza viene dada por tres vistas: Planta, Alzado y Perfil o Vista Lateral (derecha o izquierda). Puesto que se trabaja con el sistema internacional, si el Perfil está ubicado a la derecha, se trata del Perfil lateral izquierdo, y viceversa.

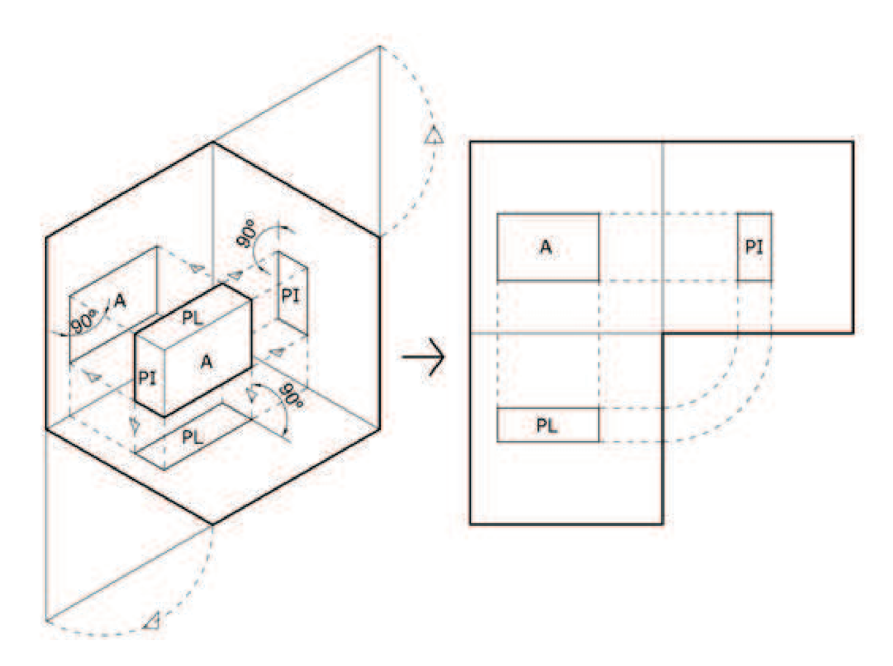


Fig. 34

Las proyecciones en el sistema internacional se consideran hechas sobre unos planos ortogonales entre sí, situados detrás de la pieza. Una vez que se despliegan estos tres planos para convertirlos en el plano de dibujo, el Perfil Izquierdo (PI) se sitúa a la derecha (Fig. 34)

De la misma manera, el Alzado (A) aparece, en la disposición de las vistas, en la parte izquierda. Por último, la Planta (PL) o vista superior se ve ubica justo debajo del Alzado.

Para establecer, a partir de las vistas ortogonales, dónde está el Alzado y dónde el Perfil, se presentan los siguientes casos (Fig. 35):

- Caso 1: Se dan Planta, Alzado y Perfil situado a la derecha. Entonces, se trata del Perfil Lateral Izquierdo o Vista Lateral Izquierda.
- Caso 2: Se dan Planta, Alzado y Perfil situado a la izquierda. Entonces se trata del Perfil Lateral Derecho o Vista Lateral Derecha.

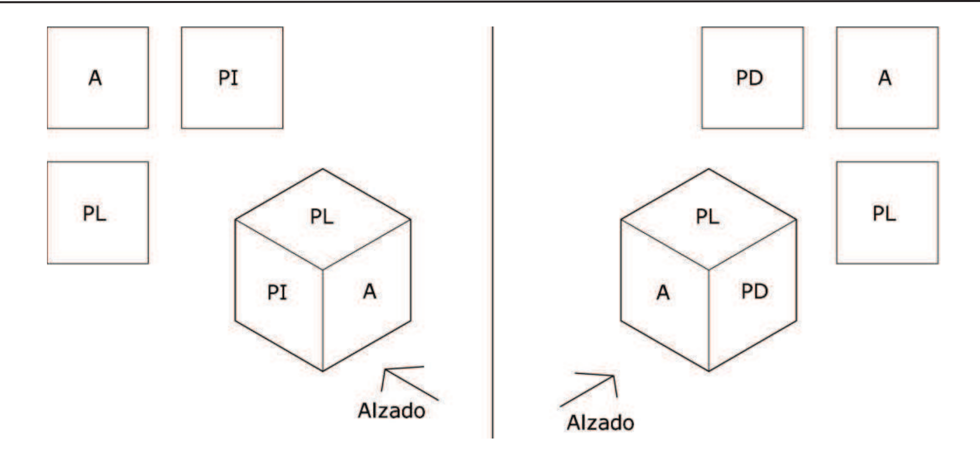


Fig. 35

El hecho de situar el Alzado correctamente tiene más importancia de lo que inicialmente pudiera parecer, ya que de ello depende que la pieza esté correcta o no. Además, la posición de la Planta depende del Alzado, así que es conveniente tomarse un tiempo para asegurarse de que éste se coloca en la posición adecuada.

c. Toma de medidas para cada eje

Para lograr que la proyección axonométrica de la pieza se adapte de la mejor forma posible a las condiciones bajo las cuales se debe realizar posteriormente el trabajo de representación, resulta útil tener en cuenta escalas y coeficientes de reducción para tomar las medidas del objeto sobre cada uno de los ejes coordenados. Por supuesto que los valores de estos coeficientes dependen del tipo de proyección, siendo posible - con la finalidad de simplificar la explicación - obviarlos si se trata de una Proyección Isométrica.

Sea la siguiente pieza, dada por su Planta, Alzado y Perfil Lateral Izquierdo (Fig. 36), la cual se habrá de representar en Proyección Isométrica.

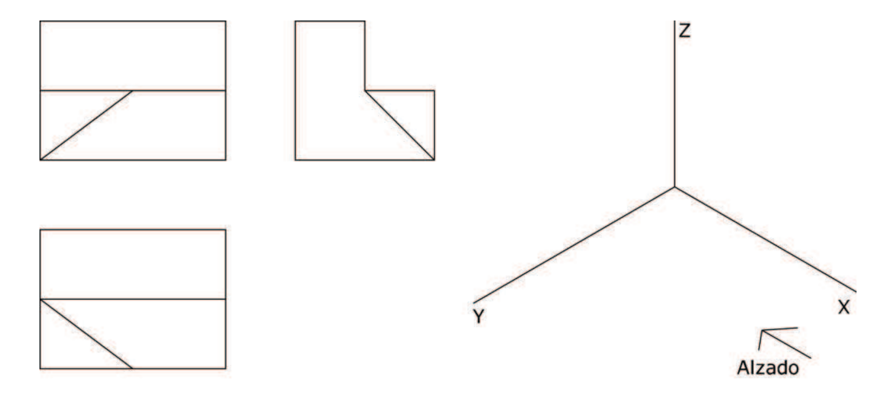


Fig. 36

En el caso de que las vistas de la pieza no sean rectángulos o cuadrados completos, es preciso dibujar dichos rectángulos. En definitiva, de lo que se trata es de dibujar el volumen envolvente. Por lo tanto, en primer lugar se dibujan los rectángulos que envuelven cada vista.

En segundo lugar se toman las medidas y se llevan a cada eje.

- El ancho del Alzado (A) se consigna sobre el eje perpendicular a la dirección que hemos marcado como Alzado (eje X).
- El ancho del Perfil o Vista Lateral (B) – que es la profundidad de la pieza – se copia sobre el eje perpendicular a la vista del Perfil (eje Y).
- La altura del Alzado (C) irá al eje vertical (eje Z).

De esta manera, tomando las medidas y llevándolas a los ejes correspondientes, se obtienen los puntos 1, 2 y 3 (Fig. 37).

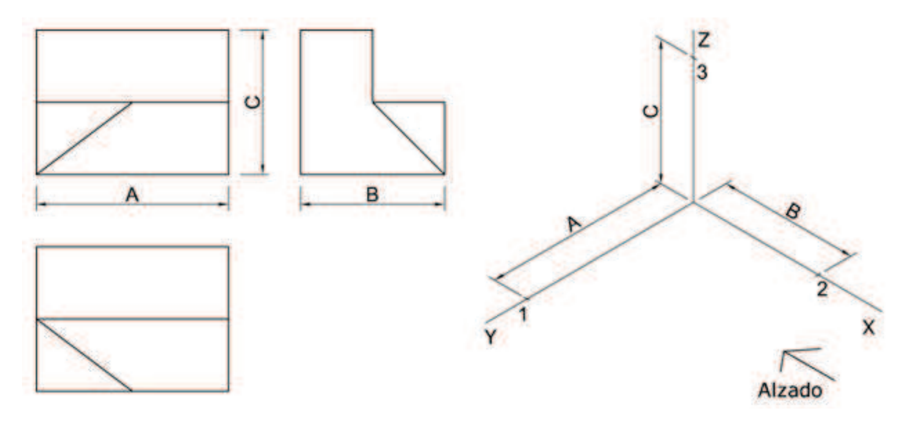


Fig. 37

d. Dibujar paralelas a los ejes hasta determinar un paralelepípedo

- Con una recta paralela al eje Y por el punto 3 y otra paralela al eje Z por el punto 1, se obtiene el punto 4.
- Con una paralela a X por 1 y otra paralela a Y por 2, se obtiene el punto 5.
- Por último, con una paralela a X por el punto 3 y otra paralela a Z por el punto 2, se obtiene el punto 6.

De esta forma ya se tiene las paredes del fondo. Para cerrar el paralelepípedo sólo hace falta dibujar una paralela a X por el punto 4, una paralela a Y por el

punto 6 y una paralela a Z por el punto 5. Luego se cierra el volumen con el punto 7 (Fig. 38).

Luego, se obtiene el vértice 7 que cierra el paralelepípedo.

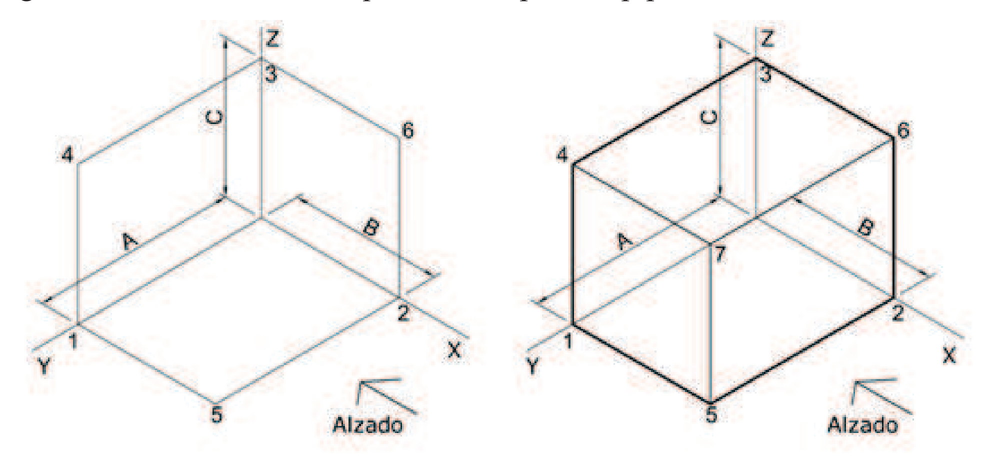


Fig. 38

Es vital tener muy claro que la orientación y las dimensiones asumidas son las correctas. Una vez determinado el volumen envolvente, resulta más fácil visualizar la pieza en su conjunto. La mayor dificultad de este paso consiste en aplicar escalas y coeficientes de reducción (ver el abordaje de estos puntos en los capítulos precedentes).

2. Dibujar las vistas sobre las caras del volumen envolvente

Esta actividad permite avanzar con la correcta visualización de la pieza dada, conduciendo hacia los pasos subsiguientes con una reducida posibilidad de error. Una buena costumbre en estas primeras etapas es la de dibujar con trazo fino (lápiz 4H o espesor de línea mínimo si se usa un programa de computadora), a fin de ensuciar lo menos posible el dibujo.

a. Dibujar el Alzado en la representación volumétrica.

En el ejemplo que se está desarrollando, el Alzado se sitúa en la parte derecha, por lo tanto dibujaremos sobre la cara denotada por los puntos 2, 5, 7 y 6.

Se toma la medida que divide en altura al objeto, la cual es de 15 mm, y se lleva a la arista 2-6 de la proyección axonométrica. Desde el punto obtenido se traza una paralela al eje Y (Fig. 39, parte derecha).

La medida que divide en anchura al Alzado, que es de 20 mm, se debe consignar sobre la arista 2-5. Dado que el punto que quiere encontrar está sobre la recta

dibujada anteriormente, es preciso proyectarlo en forma paralela a Z desde el punto medio de la arista 2-5 hasta la recta trazada anteriormente. Luego, este punto hallado se une con el vértice 5, tal como se indica originalmente en el Alzado.

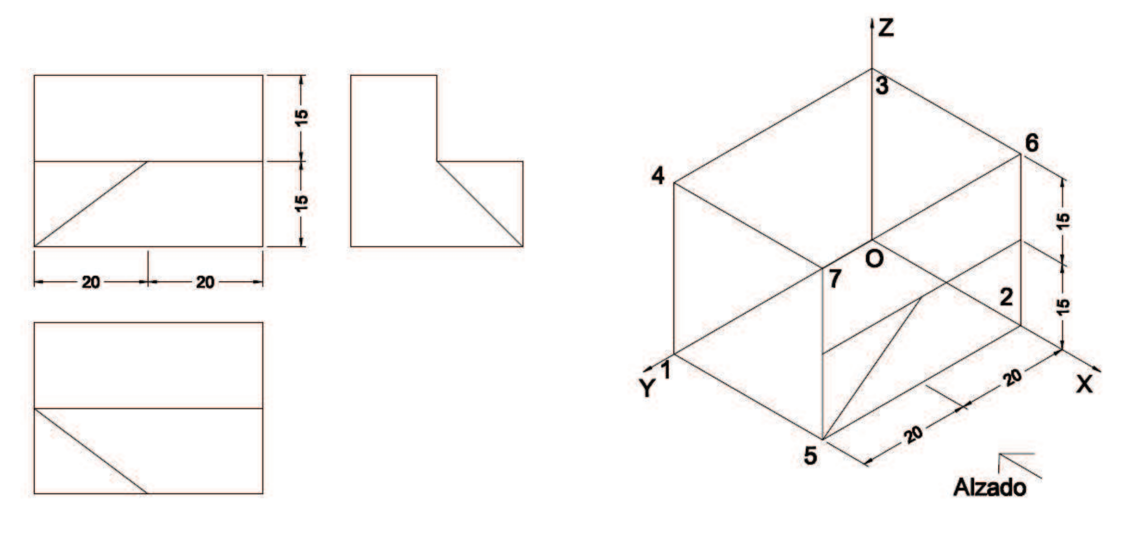


Fig. 39

b. Dibujar el Perfil o Vista Lateral en la representación volumétrica

El Perfil suministrado en las vistas ortogonales es el derecho, por lo cual debe ser dibujado sobre la cara definida por los puntos 1, 4, 7 y 5. No sería necesario volver a medir la división en la dirección vertical de 15 mm, ya que coincide con la división que se ha hecho para el Alzado. Así que bastará con trazar una línea paralela al eje X por el punto medio de la arista 5-7 (Fig. 40).

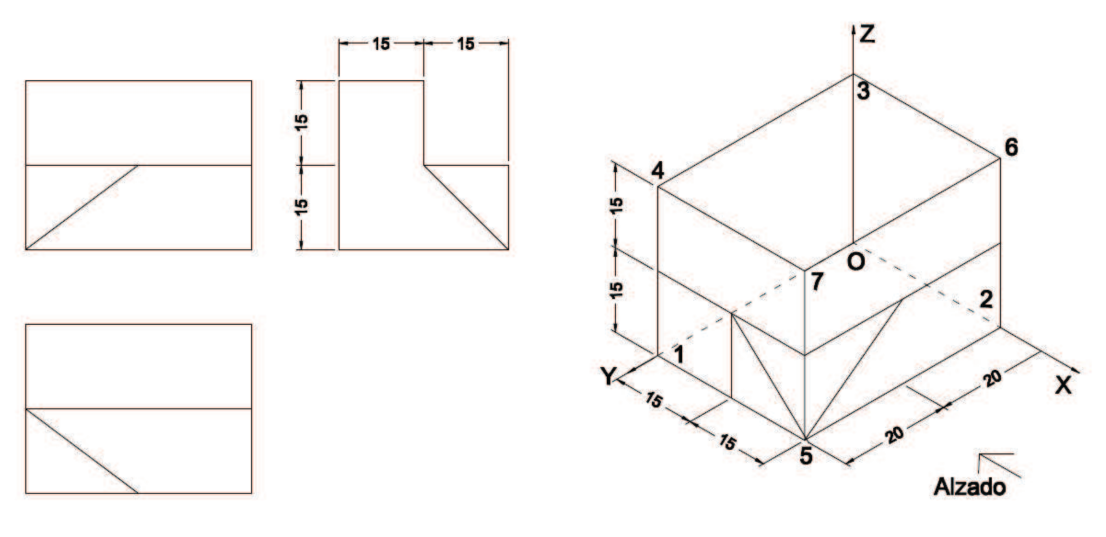


Fig. 40

La longitud de la división en horizontal, que también es de 15 mm, se lleva a la arista 1-5 y, dado que el punto que interesa está en lo alto, lo llevamos en vertical hasta que corte a la recta trazada. A continuación, se une ese punto con el vértice 5 y también se dibuja una línea recta vertical para finalizar con el trazado del Perfil.

c. Dibujar la Planta en la representación volumétrica

La Planta es la vista superior del objeto y, por lo tanto, se dibuja en la cara 3-4-7-6 del volumen envolvente. En este caso, teniendo Alzado y Perfil o Vista Lateral dibujados, es probable que no sea necesario tomar ninguna otra medida y baste con aprovechar las ya existentes. Este es el caso del ejemplo desarrollado.

La recta horizontal que divide la Planta por la mitad es una paralela al eje Y, y pasa por el punto medio de la arista 4-7, que ya se ha tomado anteriormente. La recta que es oblicua va desde ese mismo punto medio de la arista 4-7 al punto medio de la arista 6-7; este último se obtiene tomando la referencia del Alzado. Se dibuja una recta vertical desde el punto medio del Alzado y así se obtiene la Planta en representación volumétrica (Fig. 41).

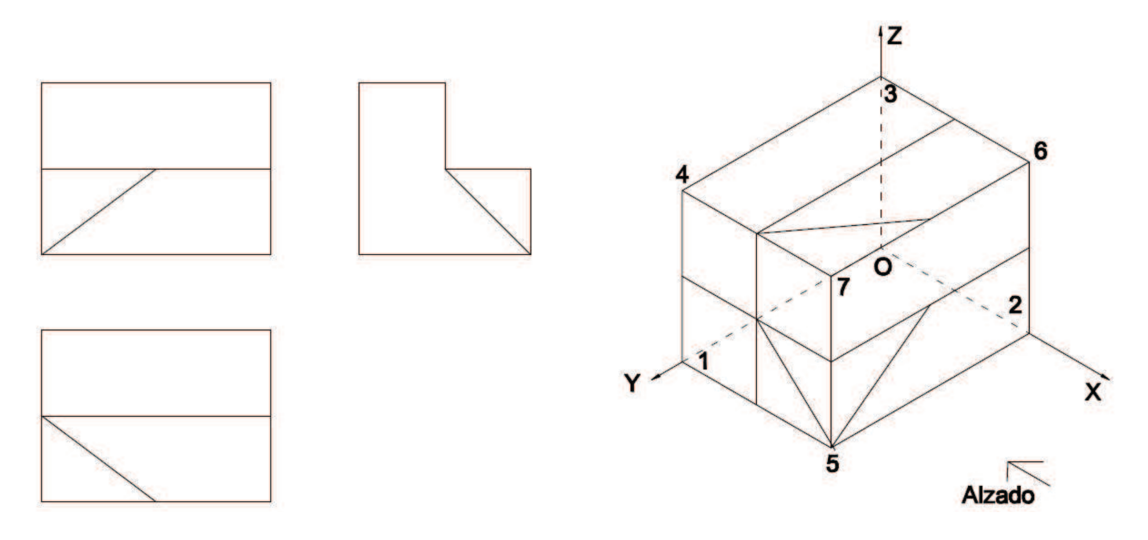


Fig. 41

3. Suprimir los trozos sobrantes de la pieza que resulten evidentes

Si el contorno de algunas de las vistas no es un rectángulo, es posible eliminar completamente este "trozo sobrante" en la representación volumétrica, ya que se tiene la certeza de que en ese lugar no va a existir ninguna parte de la pieza. De esta manera se suprime volumen sobrante, moldeando la pieza con la plena seguridad de que se está

procediendo correctamente. Esta técnica es aplicable por igual en Planta, Alzado y Perfil o Vista Lateral, por lo que el efecto logrado se multiplica.

En la pieza que se está trabajando existe un trozo evidente, pues en el Perfil falta el sector superior de la derecha (Fig. 42). Eso significa que allí no existe pieza, y en consecuencia, este sector se puede eliminar directa y completamente de la pieza.

Para hacerlo, se proyecta ese cuadrado sobrante desde el Perfil hasta el fondo (plano XZ), trazando rectas paralelas al eje Y. Estas cortarán a la cara posterior de la figura dada por O, 2, 6 y 3, obteniéndose así una pieza más sencilla que la que se tenía.

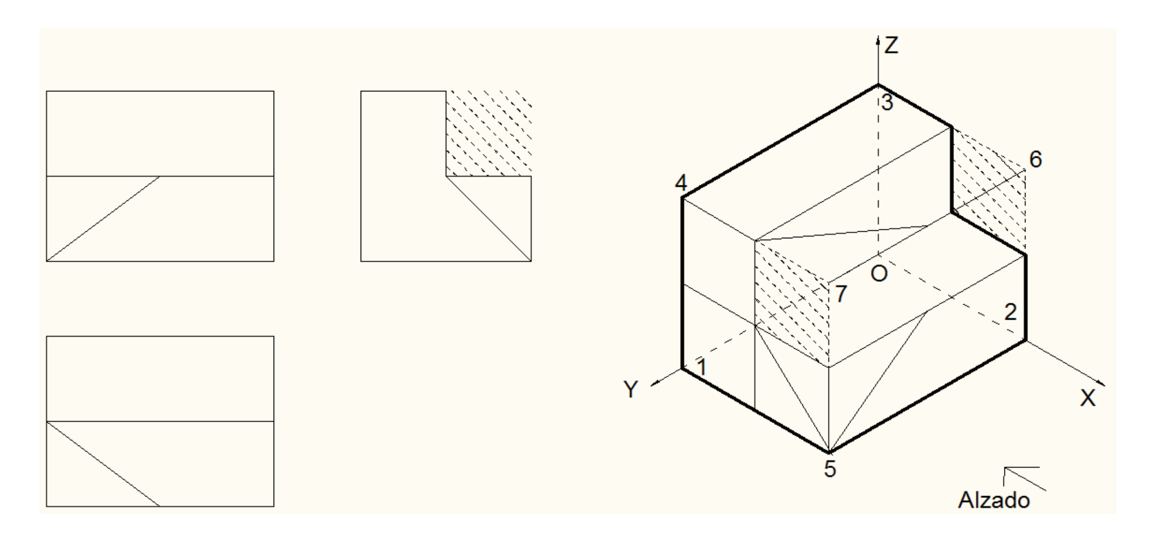


Fig. 42

Una vez suprimido el trozo sobrante, la recta oblicua de la Planta ya no tiene sentido allí, porque en ese lugar no existe pieza. Habrá que proyectarla hacia abajo, sobre la nueva superficie horizontal intermedia (Fig. 43).

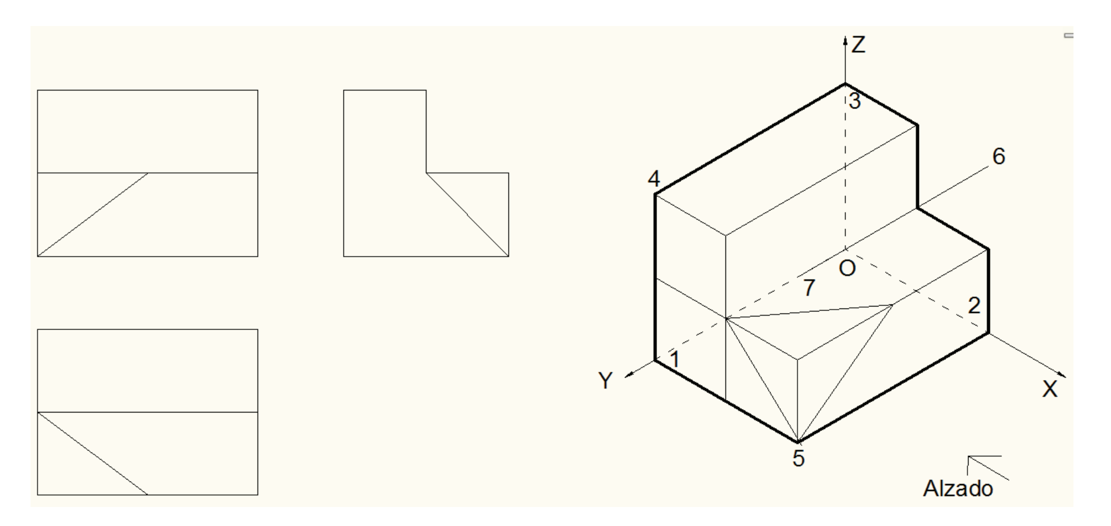


Fig. 43

Al unir los nuevos extremos en la parte intermedia de la pieza, se observa que coinciden con las otras rectas oblicuas de Alzado y Perfil. Esto determina un corte triangular en la pieza que deja el objeto completamente resuelto (Fig. 44).

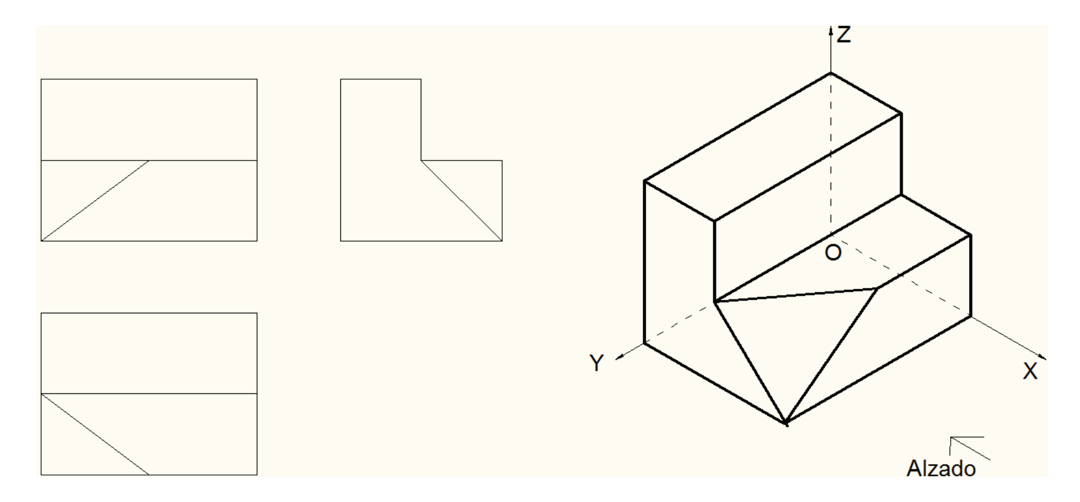


Fig. 44

Considérese ahora otro ejemplo, a fin de consolidar la comprensión. Siguiendo los dos primeros pasos, se ha obtenido el contorno de la pieza en representación volumétrica (axonométrico): se han dibujado los ejes, luego el volumen envolvente, y por último, se han construido las vistas sobre las caras del paralelepípedo.

Los trozos sobrantes del objeto son los señalados como TS1, TS2, y TS3. Como puede verse en las vistas, en estos sectores no existe pieza, por lo que se eliminan de la representación (Fig. 45-a Y 45-b).

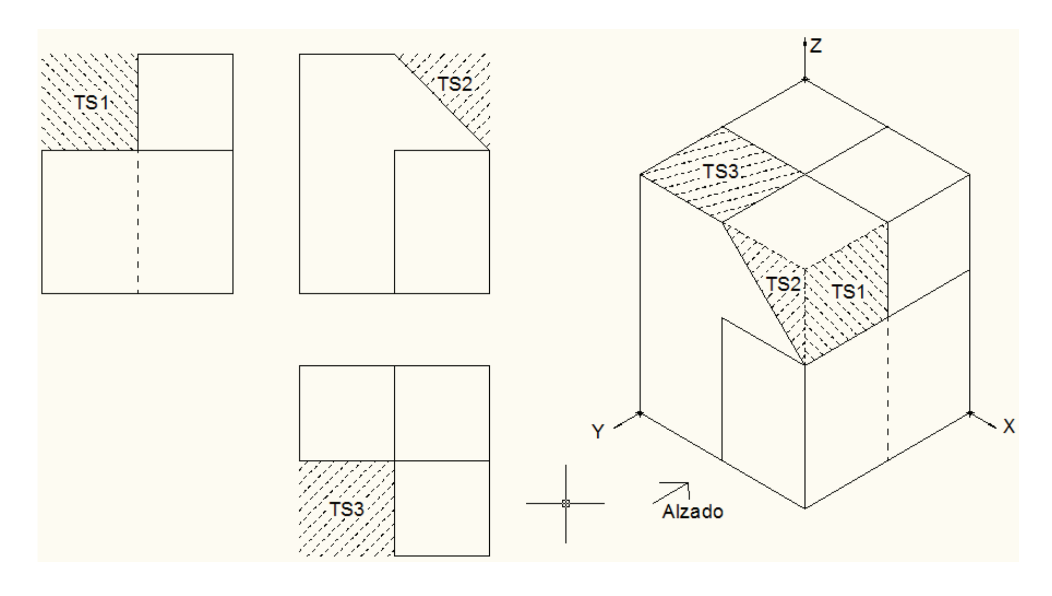


Fig. 45-a

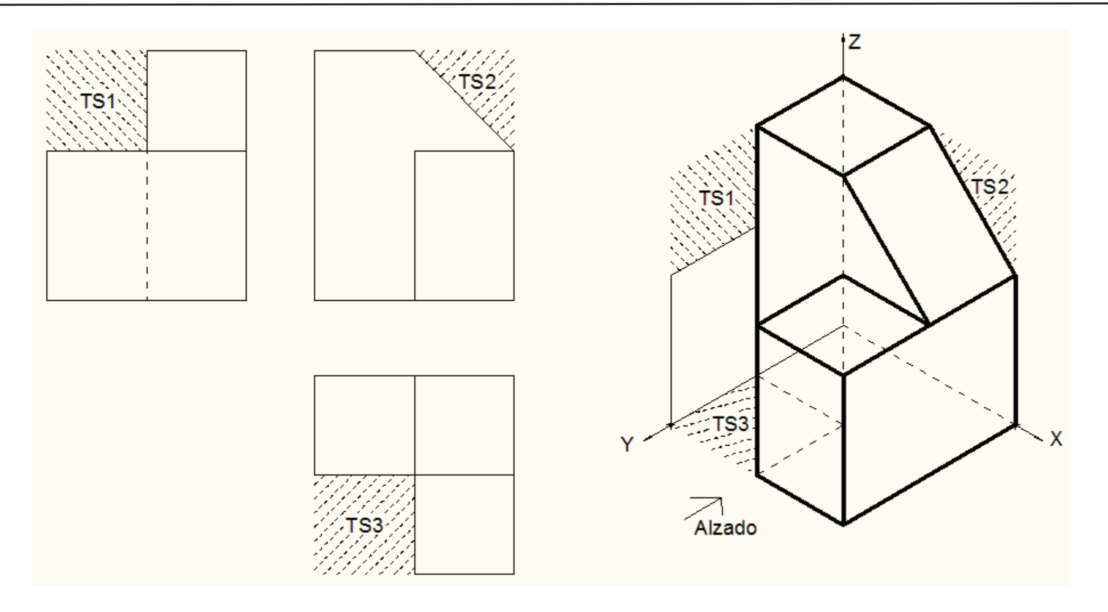


Fig. 45-b

4. Relacionar las vistas ortogonales entre sí, identificando superficies completas

Cada uno de los vértices de la pieza tiene una representación sobre cada una de las tres vistas ortogonales. Asimismo, cada vértice en una de las vistas es la representación correspondiente de un vértice de la pieza. Es especialmente importante establecer con claridad la relación existente entre las vistas ortogonales a fin de determinar cada uno de los vértices, aristas y superficies del objeto. Las superficies que se ven completas (sin aristas intermedias, es decir, como figuras geométricas planas) en las vistas, serán completas en las piezas. Las superficies están limitadas por vértices y aristas, que son las que se deben encontrar en la representación volumétrica.

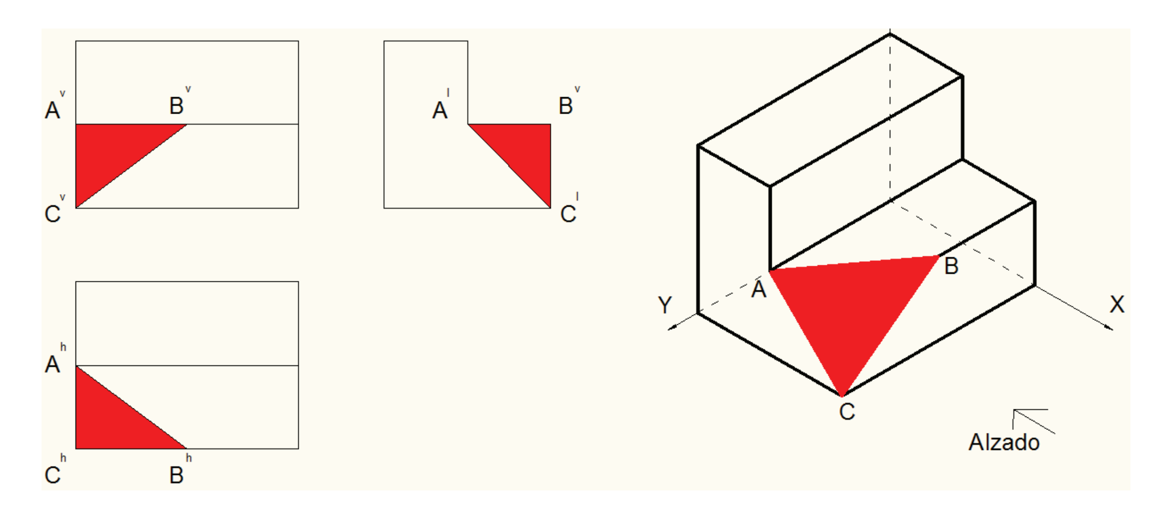


Fig. 46

La superficie más sencilla está limitada por tres lados y vértices, que son los que definen un triángulo. Por ejemplo, en cada una de las vistas ortogonales de la pieza mostrada en la Fig. 46 se puede apreciar un triángulo, lo cual corresponde a una superficie en el volumen: el triángulo ABC.

En el caso de las superficies planas, además, pueden ser paralelas a uno de los tres planos del triedro (XY, XZ o YZ) u oblicuas a los tres planos del triedro.

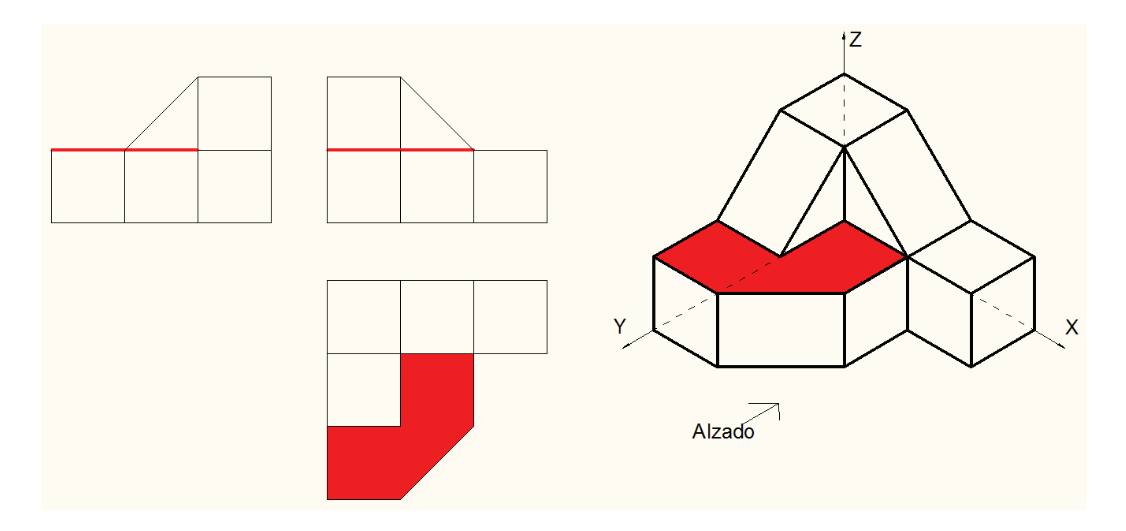


Fig. 47

Las superficies planas paralelas a uno de los planos del triedro tienen la ventaja de que en la representación volumétrica se ven idénticas a su proyección correspondiente sobre ese plano o sobre uno paralelo a él. Por ejemplo, una superficie paralela al plano XY (plano horizontal) tendrá exactamente la misma forma que en la representación volumétrica y en la Planta. Además, en las vistas es fácilmente reconocible porque esta superficie se ve en las otras dos vistas (Alzado y Perfil) como una recta (Fig. 47).

Las superficies continuas y completas que son paralelas al plano XZ y que se ven en el Alzado, serán también unas superficies completas en la representación volumétrica, mientras que se proyectan como líneas rectas en la Planta y el Perfil (Fig. 48)

Las ventajas que ofrece esta estrategia son las siguientes:

- En ocasiones la superficie tiene una forma muy característica, por lo que será fácil de reconocer en la representación volumétrica
- Se aplica el conocimiento adquirido en Sistemas de representación 10, ya que las superficies del sólido tienen posiciones que se corresponden con las posiciones del plano en el sistema diédrico.

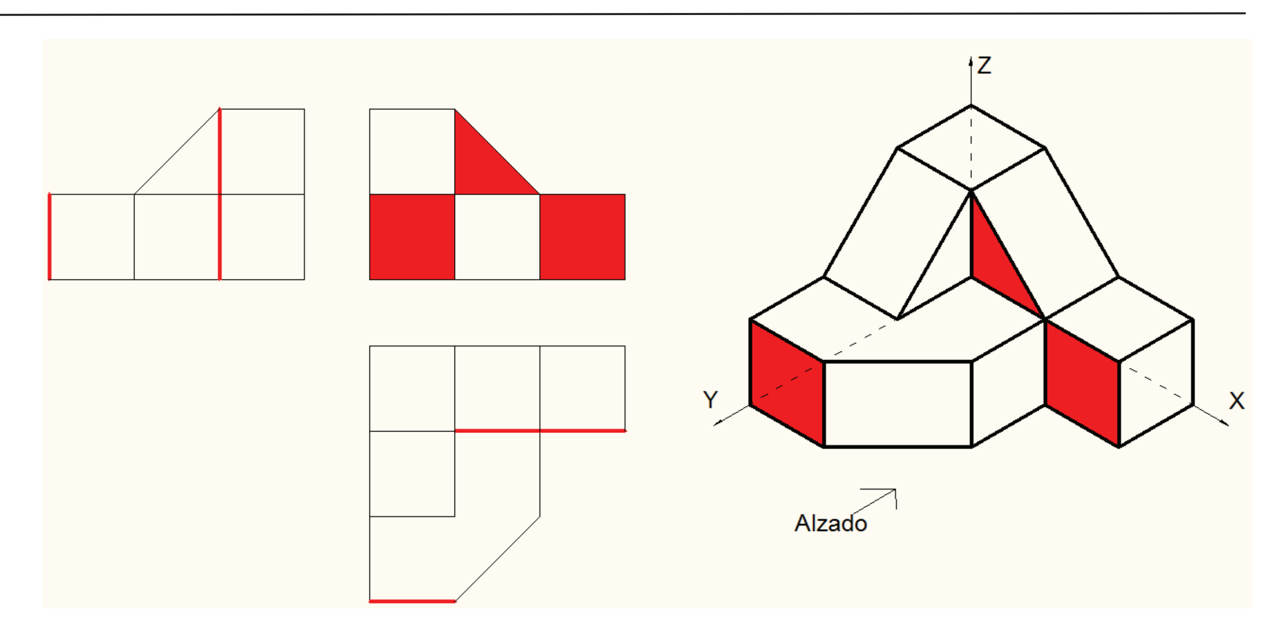


Fig. 48

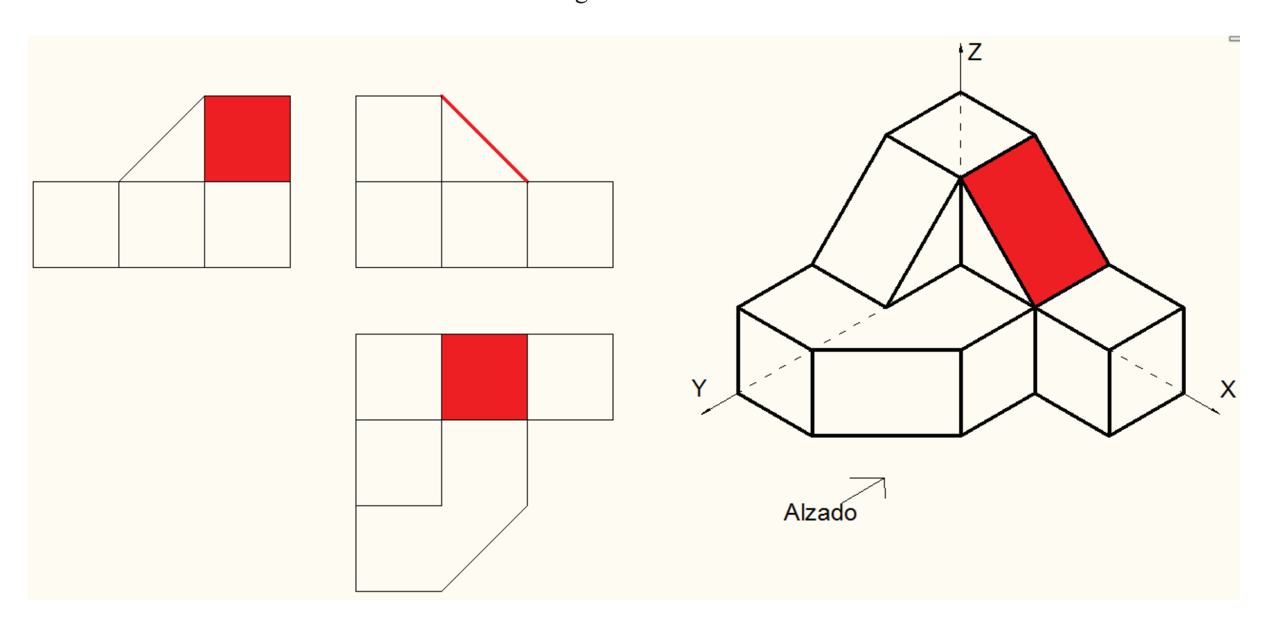


Fig. 49

En la pieza mostrada existen superficies planas que no son paralelas a ninguno de los tres planos del triedro. En la Fig. 49, la superficie resaltada, al ser perpendicular a uno de dichos planos (el plano XZ), se proyecta como una recta en el Alzado, mientras que en los otros dos se proyecta como un cuadrilátero (cuadrado).

5. Inscribir las circunferencias en cuadrados

La representación de una circunferencia en los sistemas Axonométricos depende de la posición del plano que la contiene y del sistema utilizado:

- Sistema Axonométrico Oblicuo:

- Si el plano que contiene a la circunferencia es paralelo al plano del cuadro (el XZ si se trata de una representación volumétrica caballera, o el YZ si se trata de una militar), la circunferencia en representación volumétrica se proyectará como una circunferencia.
- Si dicho plano no es paralelo al plano del cuadro, se proyectará como una elipse.

- Sistema Axonométrico Ortogonal
  - Siempre se proyectará como una elipse, a menos que el plano que la contiene sea paralelo al plano del cuadro (Triángulo Axonométrico).

Cuando la circunferencia se proyecta en representación volumétrica como una elipse, resulta recomendable inscribirla en un cuadrado, para luego trazar el dibujo de la curva en la representación volumétrica a partir de puntos de referencia sobre la misma (Fig. 49), aprovechando el hecho de que el paralelismo entre rectas es una relación geométrica que tiene propiedad proyectiva en los sistemas axonométricos.

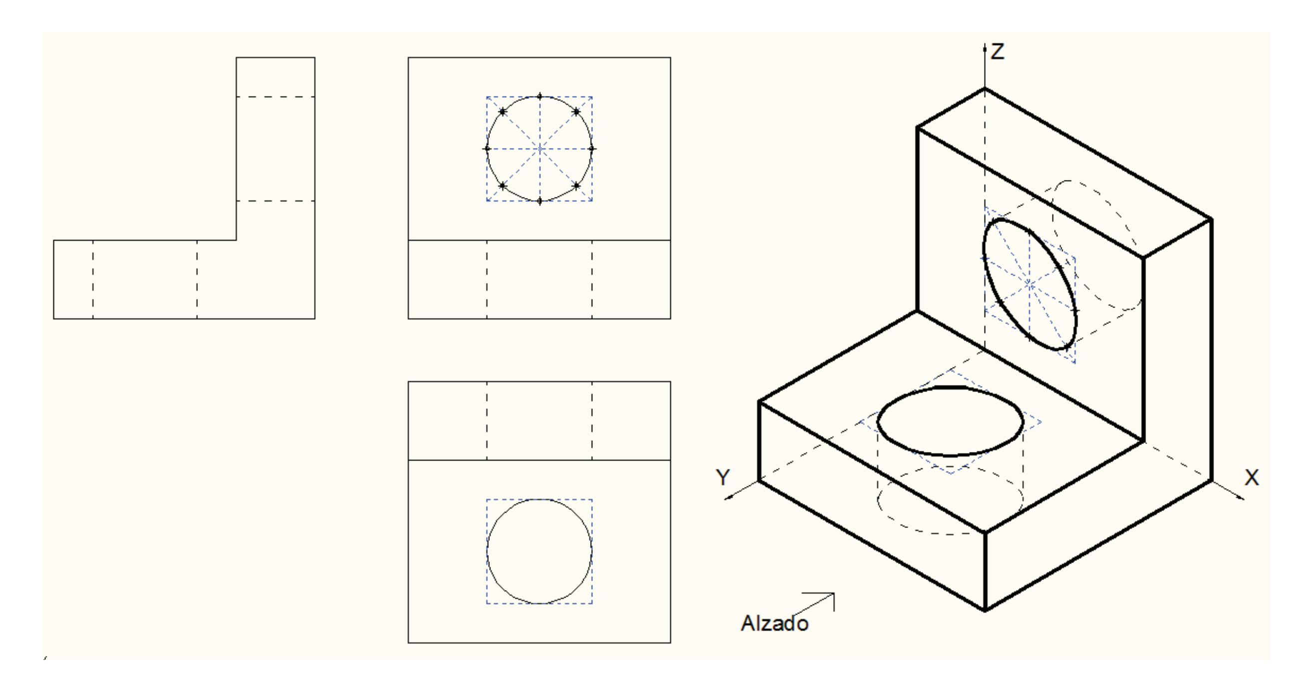


Fig. 49

EJERCICIOS RESUELTOS

A continuación se presenta una serie de ejercicios tipo diseñados y resueltos por el autor, a fin de la de suministrar al estudiante un material práctico que le sea útil en el proceso de comprensión y perfeccionamiento de los métodos relacionados con la representación axonométrica de sólidos. En cada caso se muestra el ejercicio propuesto, seguido del resultado final. Se espera que esta información contribuya con el logro de las metas planteadas en la asignatura.

1. Construir la *proyección caballera* del sólido cuyas vistas ortogonales se muestran. Determinar la correspondiente visibilidad. Usar el método gráfico con los siguientes parámetros: $\omega = 225^o$ y $q_y = 2/3$.
2. Construir la *proyección militar* del sólido cuyas vistas ortogonales se muestran. Determinar la correspondiente visibilidad. Usar el método gráfico con los siguientes parámetros: $\omega = 120^o$ y $q_z = 3/5$.
3. Construir la *proyección isométrica* del sólido cuyas vistas ortogonales se muestran. Determinar la correspondiente visibilidad. Utilizar método directo.
4. Construir la *proyección bimétrica* del sólido cuyas vistas ortogonales se muestran. Determinar la correspondiente visibilidad. Utilizar método directo con $m=4$, $n=4$ y $p=3$.
5. Construir la *proyección trimétrica* del sólido cuyas vistas ortogonales se muestran. Determinar la correspondiente visibilidad. Utilizar método gráfico con $\delta=110^o$, $\gamma=115^o$ y $\lambda=135^o$.
6. Construir la *proyección militar* del sólido cuyas vistas ortogonales se muestran. Determinar la correspondiente visibilidad. Usar el método gráfico con los siguientes parámetros: $\omega = 135^o$ y $q_z = 3/4$.

ULA

Nombre:

Sección:

Nota:

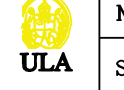
Profesor Jorge Calderón

E1

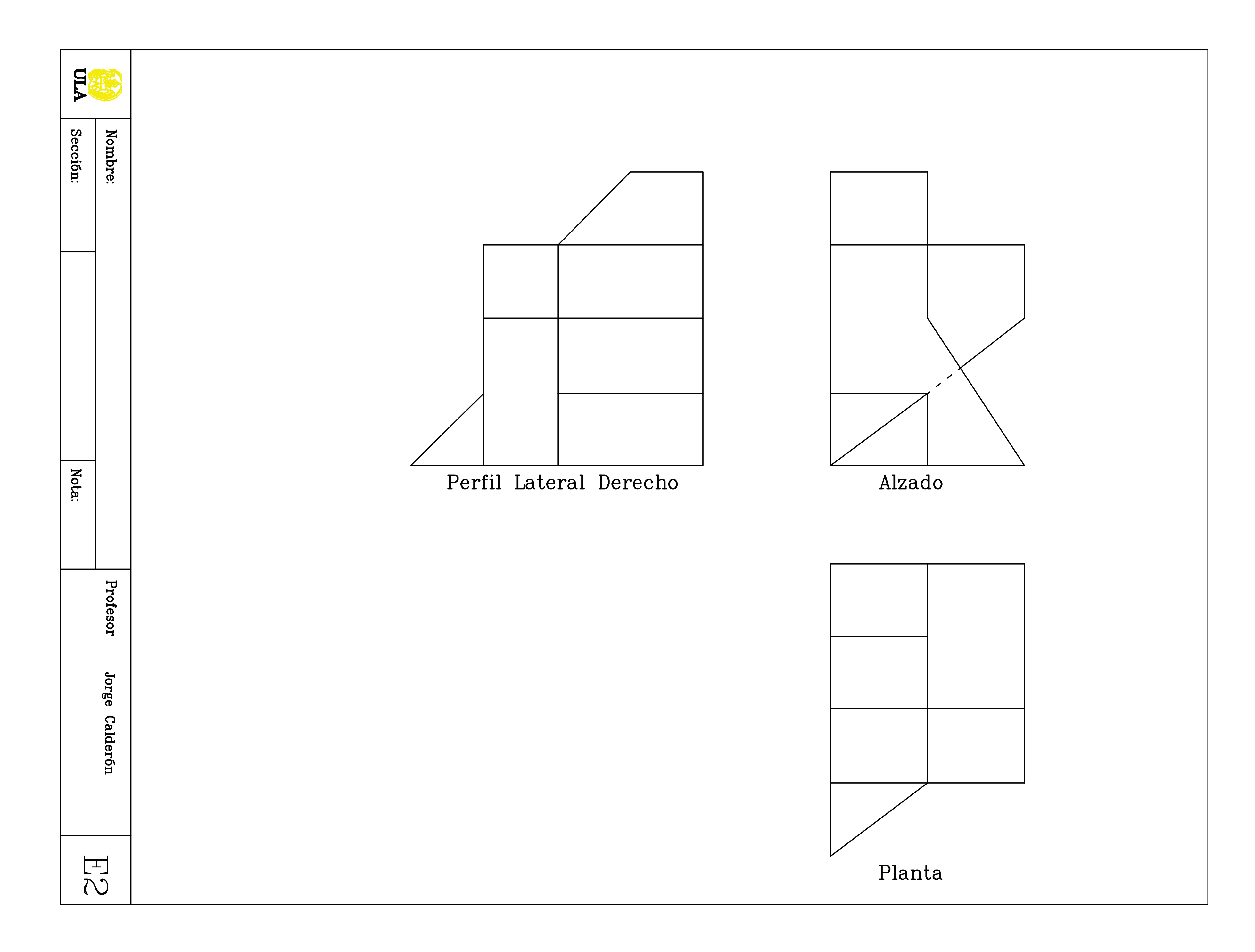
Perfil Lateral Derecho

Alzado

Planta



Nombre:			Profesor Jorge Calderón	E1
Sección:		Nota:		



ULA
Nombre:
Sección:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E2
Perfil Lateral Derecho
Alzado
Planta

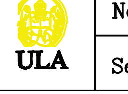
X

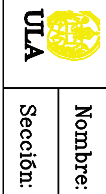
Y

Z

Z'

ALZADO

	Nombre:		Profesor Jorge Calderón	E2
	Sección:	Nota:		



Nombre:

Sección:

Nota:

Profesor Jorge Calderón

E3

Perfil Lateral Derecho

Alzado

Planta

ULA

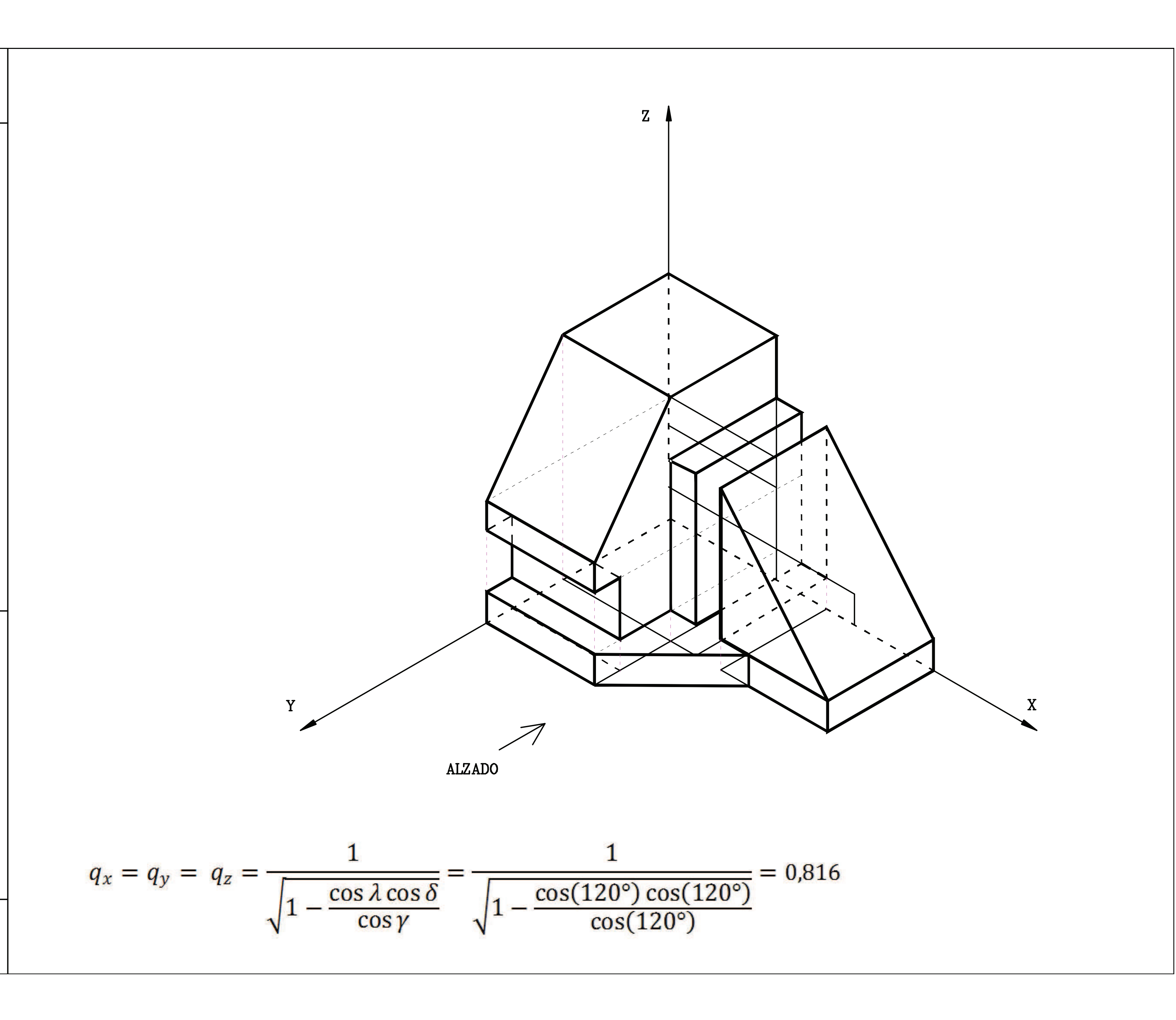
Nombre:

Sección:

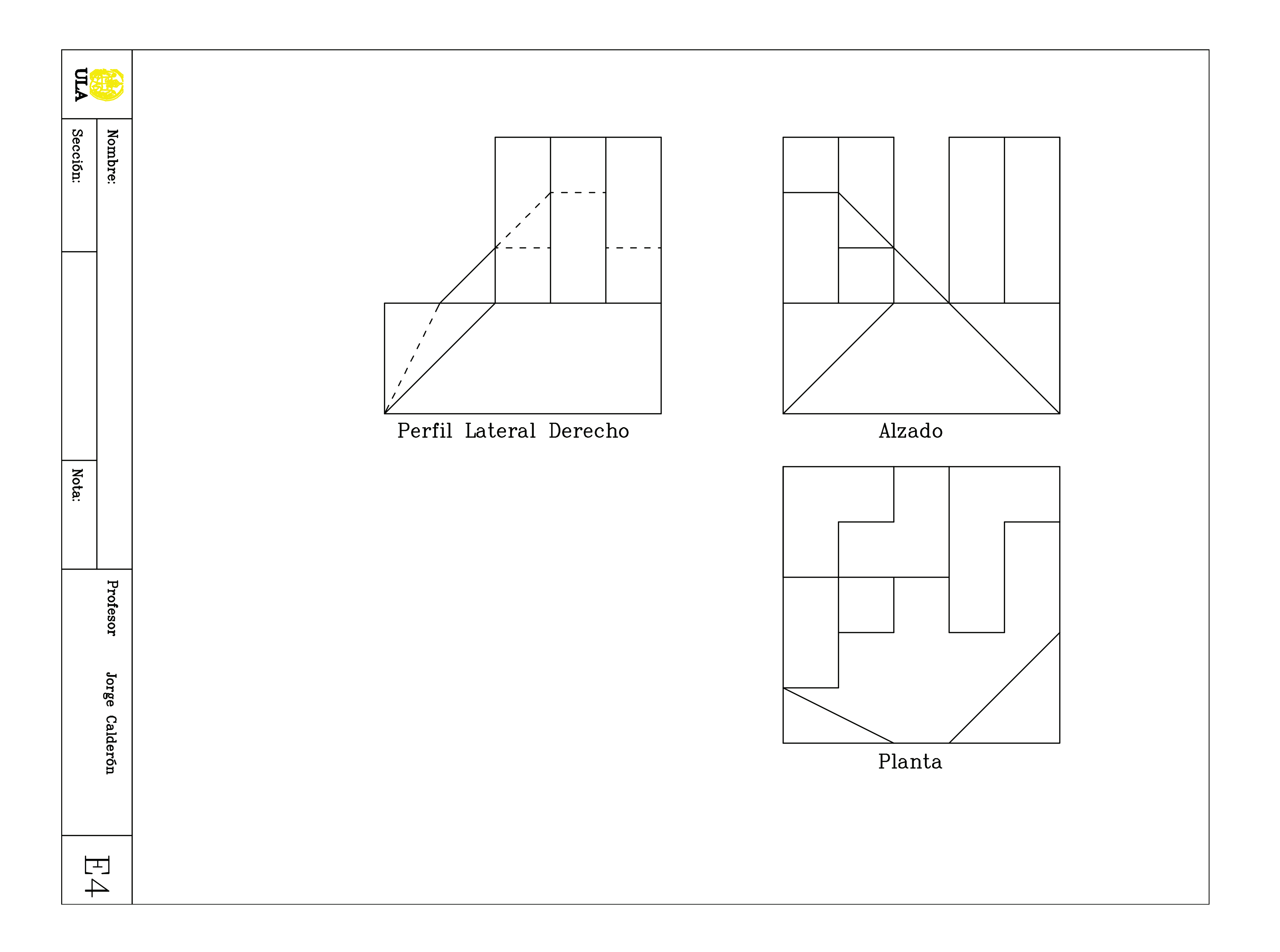
Nota:

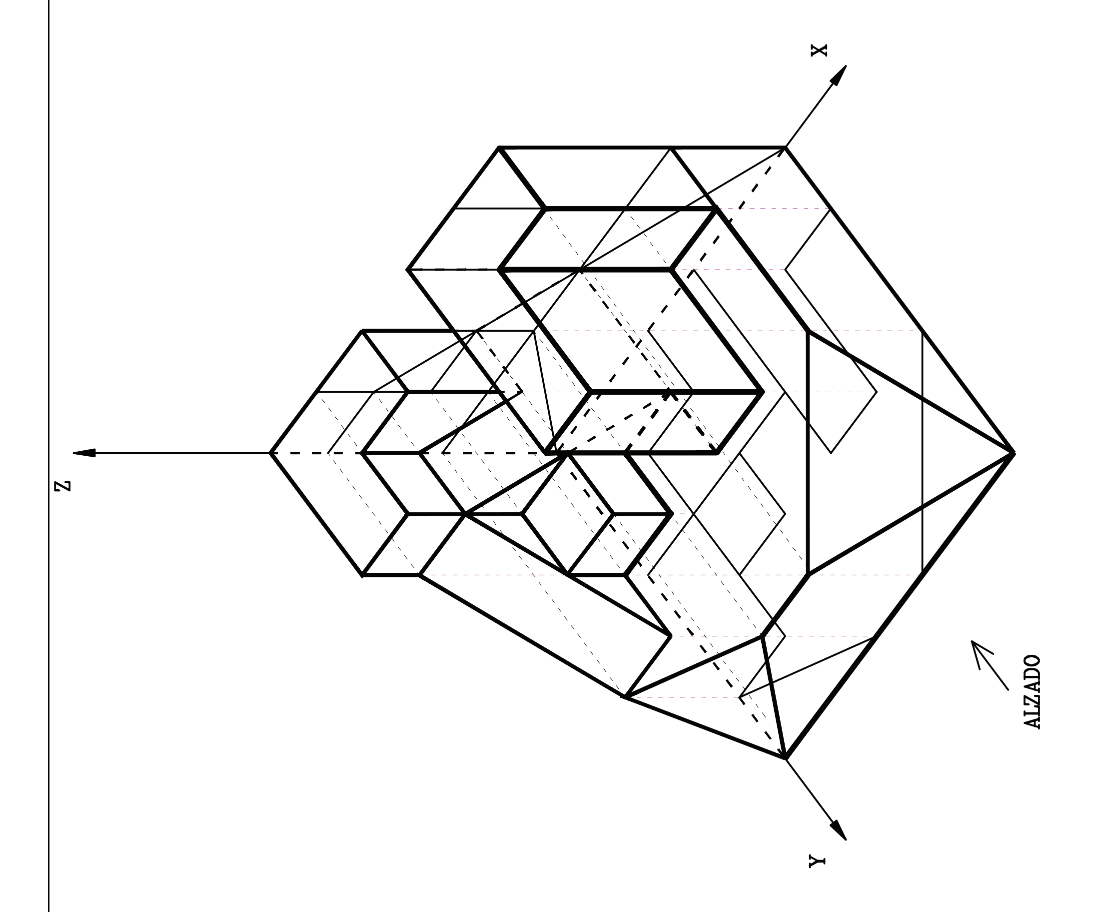
Profesor Jorge Calderón

E3



$$q_x = q_y = q_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos\lambda\cos\delta}{\cos\gamma}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\cos(120°)\cos(120°)}{\cos(120°)}}} = 0{,}816$$


ULA
Nombre:
Sección:
Nota:
Profesor
Jorge Calderón
E4
Perfil Lateral Derecho
Alzado
Planta



$$s = \sqrt{\frac{16+16+9}{2}} = 4{,}528$$

$$q_x = \cos\alpha = \frac{4}{4{,}528} = 0{,}8834$$

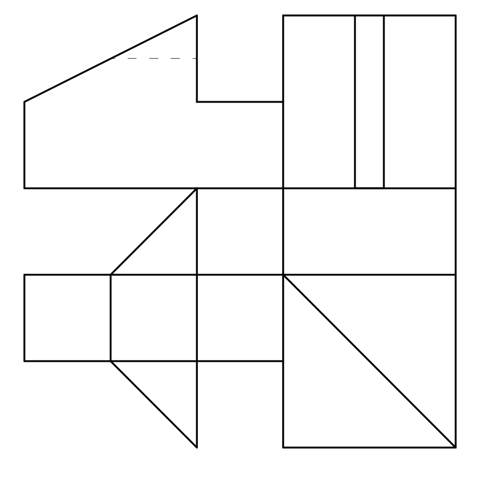
$$q_y = \cos\beta = \frac{4}{4{,}528} = 0{,}8834$$

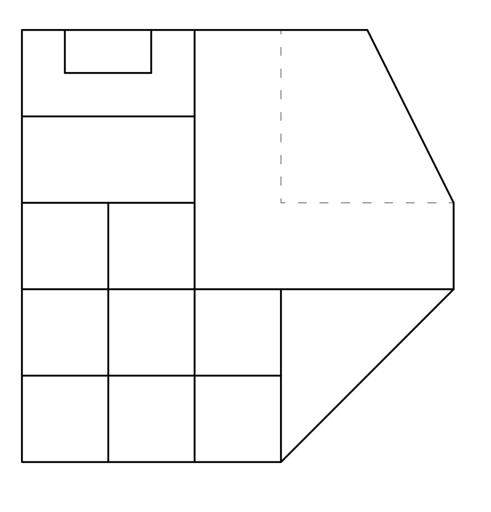
$$q_z = \cos\varepsilon = \frac{3}{4{,}528} = 0{,}6625$$

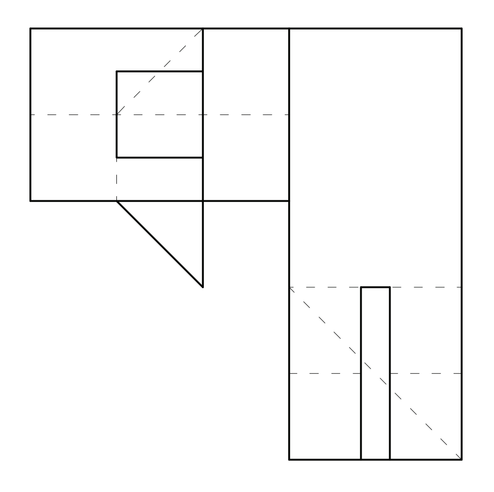
$$\gamma = \lambda = 180^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(20{,}501-16)(20{,}501-9)}}{(4)(3)}\right) = 126^\circ 49' 57''$$

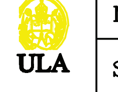
$$\delta = 180^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{(20{,}501-16)(20{,}501-16)}}{(4)(4)}\right) = 106^\circ 20' 06''$$

ULA	Nombre:			Profesor Jorge Calderón	E4
	Sección:		Nota:		

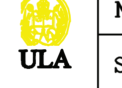






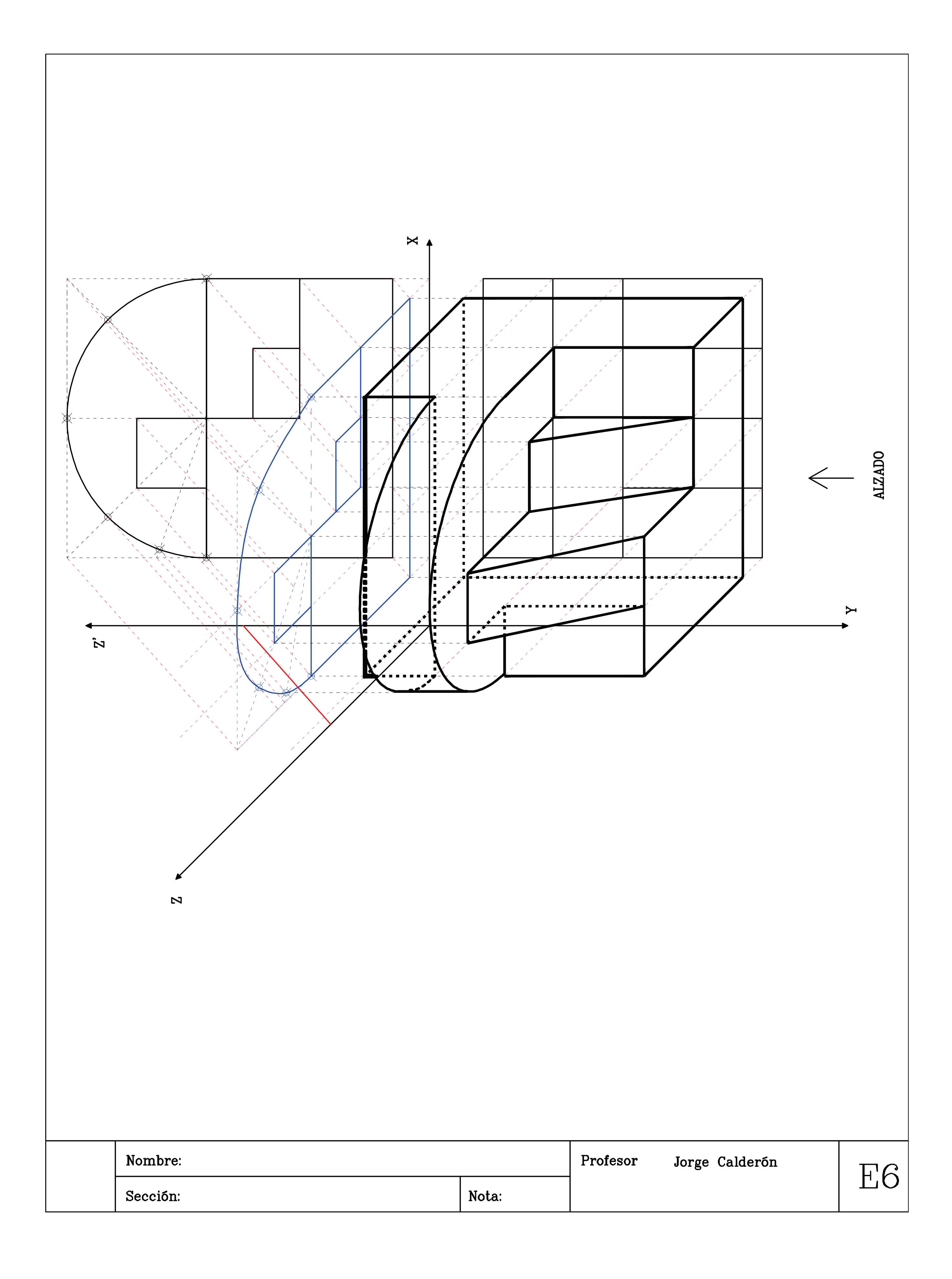


ULA	Nombre:			Profesor Jorge Calderón	E5
	Sección:		Nota:		



Nombre:			Profesor Jorge Calderón	E5
Sección:		Nota:		

ULA	Nombre:			Profesor Jorge Calderón	E6
	Sección:		Nota:		



	Nombre:	Profesor Jorge Calderón	E6
	Sección: Nota:		

BIBLIOGRAFÍA CONSULTADA

GIMÉNEZ A., Julián (1980). *Estudio de los Sistemas de Representación.* Ed. Imp. Prensa Española. Madrid.

GONZÁLEZ G., Fausto A. (1985). *Perspectiva y Sombras.* Universidad de Los Andes, Facultad de Arquitectura. Consejo de Publicaciones Mérida.

IZQUIERDO A., Fernando (1985). *Geometría Descriptiva.* Editorial Dossat. Madrid.

MORSE, Oscar H. (2008). *Dibujo Técnico I y Geometría Descriptiva.* Universidad de Carabobo. Valencia, Venezuela.

OSERS, Harry (2004). *Estudio de Geometría Descriptiva*. Editorial Torino. Caracas.

RANELLETTI, C. (1958). *Elementos de geometría descriptiva y sus aplicaciones a la teoría de las sombras y al corte de piedras y maderas*. Editorial Gustavo Gili. Barcelona.

RODRÍGUEZ DE ABAJO, E. J. (1958). *Geometría Descriptiva.* Bosch Casa Editorial. Barcelona, España.

RONDÓN R., Alicia y TÉLLEZ, Mary (1985). *Sistemas de Representación*. Universidad de Los Andes, Facultad de Arquitectura. Consejo de Publicaciones. Mérida.